Corrigés des exercices donnés pour le mardi 19 mai 2020

Exercice 3 p. 347

1. Par définition,

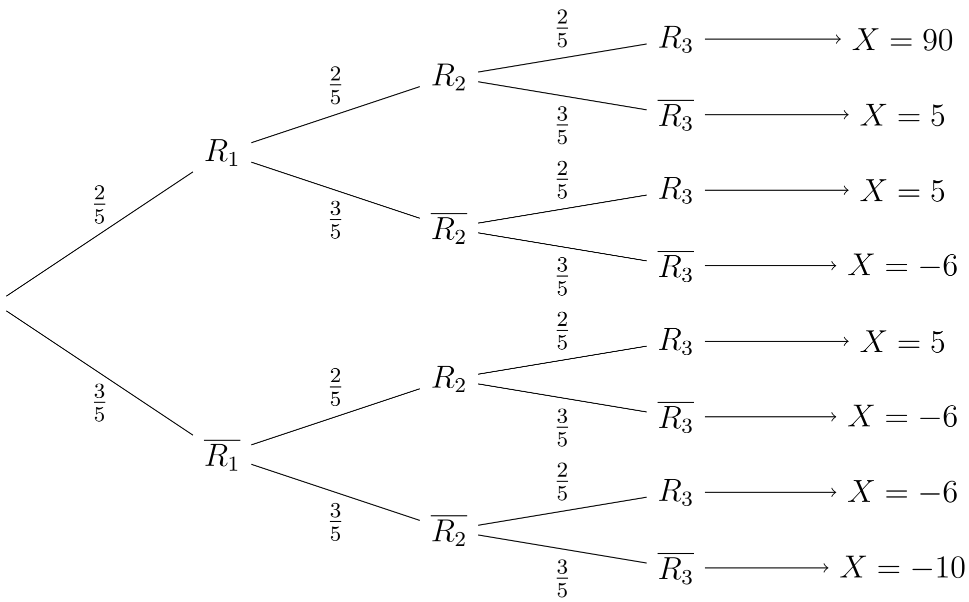
$$E(X) = 0{,}5 \times (-3) + 0{,}1 \times 1 + 0{,}1 \times 6 + 0{,}1 \times 9 + 0{,}2 \times 12 = 2{,}5.$$

2. Grâce à la formule de König-Huygens,

$$V(X) = 0{,}5 \times (-3)^2 + 0{,}1 \times 1^2 + 0{,}1 \times 6^2 + 0{,}1 \times 9^2 + 0{,}2 \times 12^2 - 2{,}5^2 = 38{,}85.$$

Exercice 6 p. 349

1. Les valeurs prises par X sont $0 - 10 = -10$, $4 - 10 = -6$, $15 - 10 = 5$ et $100 - 10 = 90$. Ainsi, $X(\Omega) = \{-10\,;-6\,;5\,;90\}$.
Comme les tirages sont équiprobables, on modélise un tirage par l'équiprobabilité sur l'ensemble des 10 boules. Comme il y a remise de la boule tirée, à chaque tirage, la probabilité de tirer une boule rouge est $\frac{4}{10} = \frac{2}{5}$.
On peut représenter l'expérience par l'arbre suivant en notant R_i l'évènement « le joueur tire une boule rouge au i−ème tirage ».



On en déduit que

$$P(X = -10) = \left(\frac{3}{5}\right)^3 = \frac{27}{125}$$
$$P(X = -6) = 3 \times \frac{2}{5} \times \left(\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{54}{125}$$
$$P(X = 5) = 3 \times \left(\frac{2}{5}\right)^2 \times \frac{3}{5} = \frac{36}{125}$$
$$P(X = 90 = \left(\frac{2}{5}\right)^3 = \frac{8}{125}$$

Ainsi, la loi de X est donnée par le tableau suivant :

x_i	-10	-6	5	90
$p(X = x_i)$	$\frac{27}{125}$	$\frac{54}{125}$	$\frac{36}{125}$	$\frac{8}{125}$

2. L'espérance de X est

$$E(X) = \frac{27}{125} \times (-10) + \frac{54}{125} \times (-6) + \frac{36}{126} \times 5 + \frac{8}{125} \times 90 = \frac{306}{125} \approx 2{,}45.$$

Cela signifie qu'en moyenne un joueur gagne environ 2,45 euros à chaque partie.

3. En moyenne, l'organisateur perd donc 2,45 euros par partie. Pour ne pas perdre d'argent, il doit augmenter la mise de telle sorte que l'espérance soit négative ou nulle. Notons b l'augmentation de la mise cherchée. Le nouveau gain algébrique est alors $Y = X - b$ donc, par linéarité de l'espérance, $E(Y) = E(X) - b = 2{,}45 - b$. Ainsi, $E(Y) \leqslant 0$ si et seulement si $2{,}45 - b \leqslant 0$ ce qui équivaut donc à $b \geqslant 2{,}45$.

Ainsi, pour ne pas perdre d'argent, l'organisateur doit augmenter la mise d'au moins 2,45 euros et donc de 3 euros si on veut un nombre entier.

Exercice 40 p. 355. À l'aide de la calculatrice, on trouve $E(X) = 4{,}5$, $V(X) = 85{,}95$ et $\sigma(X) \approx 9{,}27$.

Exercice 41 p. 355

1. L'espérance de X est

$$E(X) = 0{,}1 \times 5 + 0{,}45 \times 9 + 0{,}32 \times 10 + 0{,}13 \times 12 = 9{,}31.$$

Grâce à la formule de König-Huygens,

$$V(X) = 0{,}1 \times 5^2 + 0{,}45 \times 9^2 + 0{,}32 \times 10^2 + 0{,}13 \times 12^2 - 9{,}31^2 = 2{,}9939$$

et donc $\sigma(X) = \sqrt{X} \approx 1{,}73$.

Exercice 43 p. 356. D'après le tableau, l'espérance de X est

$$E(X) = 0{,}5 \times (-1) + 0{,}2 \times 2 + 0{,}3a = 0{,}3a - 0{,}1.$$

Or, l'énoncé précise que $E(X) = 1{,}4$ donc $0{,}3a - 0{,}1 = 1{,}4$ i.e. $0{,}3a = 1{,}5$ et donc $a = \frac{1{,}5}{0{,}3}$ c'est-à-dire $a = 5$.

Exercice 49 p. 356

1. L'espérance de X est

$$E(X) = 0{,}6 \times (-3) + 0{,}2 \times (-2) + 0{,}05 \times 0 + 0{,}1 \times 1 + 0{,}05 \times 2 = -2$$

donc l'affirmation est fausse.

2. L'affirmation est vraie par linéarité de l'espérance : $E(2X) = 2E(X)$.

3. Augmenter toutes les valeurs de 10% revient à les multiplier par $1 + \frac{10}{100} = 1{,}1$. Par linéarité de l'espérance, $E(1{,}1X) = 1{,}1E(X)$ donc l'espérance sera aussi multipliée par 1,1. L'affirmation est fausse.