Correction des exercices donnés pour le mardi 17 mars 2020

Exercice 11 p. 149

1. Par définition, (u_n) est géométrique de raison 5.
2. On a $u_1 = 5$, $u_2 = 10$ et $u_3 = 15$. Ainsi, $\frac{u_2}{u_1} = 2$ et $\frac{u_3}{u_2} = \frac{3}{2} \neq 2$ donc (u_n) n'est pas géométrique.
3. La suite (u_n) est de la forme : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = u_0 \times q^n$ avec $u_0 = 1$ et $q = 5$ donc (u_n) est géométrique de raison 5.
4. $u_0 = 2$, $u_1 = 5$ et $u_2 = 11$ donc $\frac{u_1}{u_0} = 2{,}5$ et $\frac{u_2}{u_1} = 2{,}2 \neq 2{,}5$ donc (u_n) n'est pas géométrique.
5. La suite (u_n) est de la forme : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = u_0 \times q^n$ avec $u_0 = 2$ et $q = 3$ donc (u_n) est géométrique de raison 3.
6. REMARQUE : vous pouvez sauter ce cas, il n'est pas très intéressant. Je mets tout de même la correction complète mais ne perdez pas trop de temps dessus.

   $u_2 = 2u_0 + 3$ et $u_4 = 2u_2 + 3 = 2(2u_0 + 3) + 3 = 4u_0 + 9$. Supposons que (u_n) soit géométrique de raison q. Si $u_0 = 0$ alors $3 = u_2 = u_0 \times q^2 = 0 \times q^2 = 0$ ce qui est contradictoire. Par le même raisonnement, on obtient que $u_2 \neq 0$. Ainsi, u_0 et u_2 sont non nuls donc, comme $u_2 = u_0 q^2$ et $u_4 = u_2 q^2$, $\frac{u_2}{u_0} = \frac{u_4}{u_2} (= q^2)$ et ainsi, grâce aux produits en croix, $u_2^2 = u_0 u_4$. Dès lors, $(2u_0 + 3)^2 = u_0(4u_0 + 9)$ donc $4u_0^2 + 12u_0 + 9 = 4u_0^2 + 9u_0$ et ainsi $9 = -3u_0$ c'est-à-dire $u_0 = -3$.

   On conclut que si $u_0 \neq -3$ alors (u_n) n'est pas géométrique. En revanche, si $u_0 = -3$ alors $u_2 = 2u_0 + 3 = -3$, $u_4 = 2u_2 + 3 = -3$ et, de manière générale, pour tout entier pair n, $u_n = -3$. Dans ce cas, on a, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{2(n+1)} = u_{2n} = -3$. Or, si (u_n) est géométrique de raison q, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{2(n+1)} = u_{2n+2} = q^2 u_{2n}$ donc $-3 = q^2 \times (-3)$ donc $q^2 = 1$. Ainsi, $q = 1$ ou $q = -1$. Finalement, si $u_1 = -3$ alors (u_n) est constante égale à -3 donc géométrique de raison 1, si $u_1 = 3$, (u_n) est géométrique de raison -1 et si u_1 ne vaut ni -3 ni 3, (u_n) n'est pas géométrique.

Exercice 14 p. 150

1. En 2019, il y aura $54000 + \frac{5}{100} \times 54000 = 56700$ visiteurs et, en 2020, $56700 + \frac{5}{100} \times 56700 = 59535$ visiteurs.
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n + \frac{5}{100} u_n = u_n + 0{,}05u_n = (1 + 0{,}05)u_n$ c'est-à-dire $u_{n+1} = 1{,}05u_n$. On en déduit que (u_n) est géométrique de raison 1,05.
3. Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = u_0 \times 1{,}05^n = 54000 \times 1{,}05^n$.
4. Comme $2025 = 2018 + 7$, on calcule u_7. Or, $u_7 = 54000 \times 1{,}05^7 \approx 75983$ donc le musée peut espérer avoir un peu moins de 76000 visiteurs en 2025.

Exercice 64 p. 158

1. $u_1 = 5$, $u_2 = 20$ et $u_3 = 45$ donc $\frac{u_2}{u_1} = 4$ et $\frac{u_3}{u_2} = 2{,}25 \neq 4$ donc (u_n) n'est pas géométrique.
2. (v_n) est de la forme : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = v_0 q^n$ avec $v_0 = 3$ et $q = 4$ donc (v_n) est géométrique de raison 4.
3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$,
   $$w_{n+1} = \frac{4^{n+1}}{3^{n+2}} = \frac{4 \times 4^n}{3 \times 3^{n+1}} = \frac{4}{3} \times \frac{4^n}{3^{n+1}} = \frac{4}{3} w_n$$
   donc (w_n) est géométrique de raison $\frac{4}{3}$.
4. $t_0 = -2$, $t_1 = t_0 + 2 = 0$ et $t_2 = t_1 + 2^2 = 4$ donc, si (t_n) est géométrique de raison q alors $t_2 = qt_1$ c'est-à-dire $4 = q \times 0 = 0$ ce qui est contradictoire donc (t_n) n'est pas géométrique.
5. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $k_n = \frac{4}{3} \times (-5)^n$ donc (k_n) est de la forme : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $k_n = k_0 q^n$ avec $k_0 = \frac{4}{3}$ et $q = -5$ donc (k_n) est géométrique de raison -5.
6. Par définition, (z_n) est géométrique de raison -3.

Exercice 68 p .158

1. (u_n) est de la forme : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = u_0 q^n$ avec $u_0 = 4$ et $q = 0{,}2$ donc (u_n) est géométrique de raison 0,2 et de premier terme 4. Comme $u_0 > 0$ et $0 < q < 1$, (u_n) est décroissante.
2. (v_n) est de la forme : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = v_0 q^n$ avec $v_0 = -3$ et $q = 4$ donc (v_n) est géométrique de raison 4 et de premier terme -3. Comme $v_0 < 0$ et $q > 1$, (v_n) est décroissante.
3. (w_n) est une suite géométrique de raison $q = \frac{1}{5}$ et de premier terme $w_0 = -2$. Comme $w_0 < 0$ et $0 < q < 1$, (w_n) est croissante.
4. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $t_n = \frac{2}{3 \times 3^n} = \frac{2}{3} \times \frac{1}{3^n} = \frac{2}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^n$ donc (t_n) est géométrique de raison $q = \frac{1}{3}$ et de premier terme $t_0 = \frac{2}{3}$. Ainsi, comme $t_0 > 0$ et $0 < q < 1$, (t_n) est décroissante.
5. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $k_n = \frac{1}{10} \times (-2)^n$ donc (k_n) est géométrique de raison $q = -2$ et de premier terme $k_0 = \frac{1}{10}$. Ainsi, $q < 0$, la suite (k_n) n'est pas monotone.
6. La suite (z_n) est géométrique de premier terme $z_0 = 5$ et de raison $q = 3$. Comme $z_0 > 0$ et $q > 1$, (z_n) est croissante.