Corrigés des exercices donnés pour le mardi 16 juin 2020

Exercice 78 p. 289

1. Une équation de $\mathscr{C}$ est $(x-2)^2+(y-1)^2=25$.

2. Étant donné que $(x_B-2)^2+(y_B-1)^2=(5-2)^2+(-3-1)^2=3^2+(-4)^2=9+16=25$, le point B appartient à $\mathscr{C}$.

3. a. Les coordonnées de $\overrightarrow{AB}$ sont $(5-2\,;-3-1)$ i.e. $(3\,;-4)$.

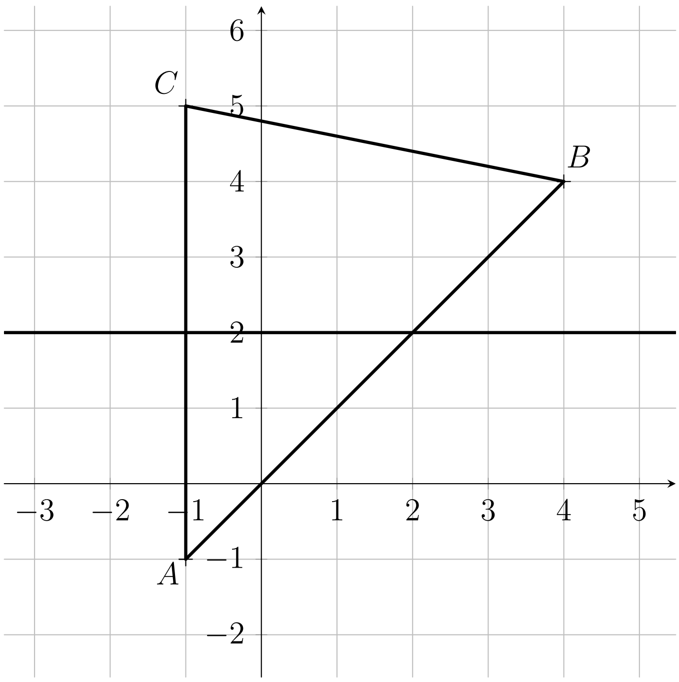
b. Comme $\mathcal{T}$ est tangente à $\mathscr{C}$ en B, $\mathcal{T}$ est perpendiculaire à (AB) donc $\overrightarrow{AB}$ est normal à $\mathcal{T}$. Dès lors,

$$\begin{aligned}
M\,(x\,;y)\in\mathcal{T} &\Leftrightarrow \overrightarrow{BM}\cdot\overrightarrow{AB}=0\\
&\Leftrightarrow (x-5)\times 3+(y-(-3))\times(-4)=0\\
&\Leftrightarrow 3x-15-4y-12=0\\
&\Leftrightarrow 3x-4y-27=0
\end{aligned}$$

Ainsi, une équation de $\mathcal{T}$ est $3x-4y-27=0$.

Exercice 79 p. 289

1. a.



b. Graphiquement, une équation de la médiatrice d de $[AC]$ est $y=2$.

2. a. Les coordonnées de $\overrightarrow{BC}$ sont $(-1-4\,;5-4)$ i.e. $(-5\,;1)$.

b. La médiatrice d' de $[BC]$ est la perpendiculaire à (BC) passant par le milieu de I de $[BC]$. Les coordonnées de I sont $\left(\frac{4+(-1)}{2}\,;\frac{4+5}{2}\right)$ i.e. $\left(\frac{3}{2}\,;\frac{9}{2}\right)$ donc

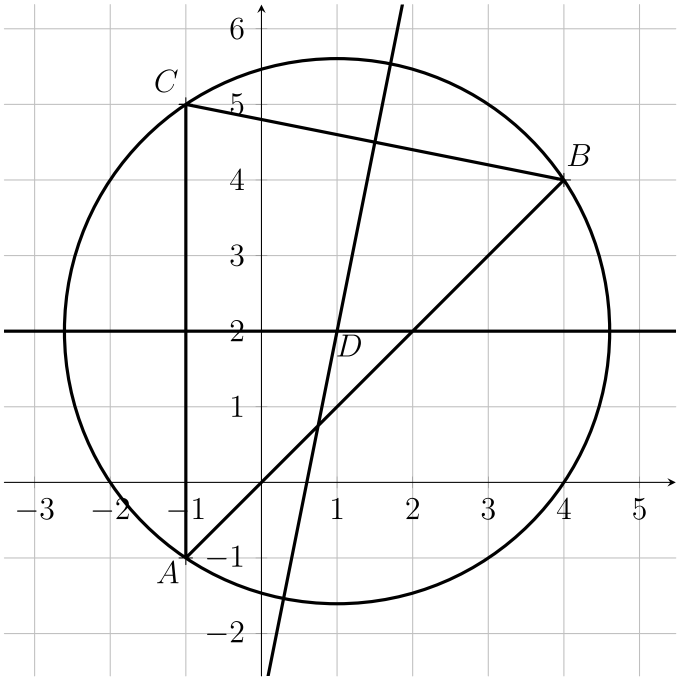
$$\begin{aligned}
M\,(x\,;y)\in d' &\Leftrightarrow \overrightarrow{IM}\cdot\overrightarrow{BC}=0\\
&\Leftrightarrow \left(x-\frac{3}{2}\right)\times(-5)+\left(y-\frac{9}{2}\right)\times 1=0\\
&\Leftrightarrow -5x+\frac{15}{2}+y-\frac{9}{2}=0\\
&\Leftrightarrow -5x+y+3=0
\end{aligned}$$

Ainsi, une équation de d' est $-5x+y+3=0$.

3. Le centre D du cercle circonscrit est le point d'intersection des médiatrices du triangle. En particulier, D est le point d'intersection de d et d' donc ses coordonnées sont solutions du système :

$$\begin{cases} y = 2 \\ -5x + y + 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2 \\ -5x + 2 + 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2 \\ x = 1 \end{cases}$$

Ainsi, les coordonnées de D sont $(1\,;2)$.



Exercice 105 p. 292

1. Les coordonnées de $\overrightarrow{AC}$ $(6 - (-6)\,; -1 - 3)$ i.e. $(12\,; -4)$. La hauteur h_B issue de B est la droite passant par B et perpendiculaire à (AB). Ainsi, $\overrightarrow{AC}$ $(12\,; -4)$ est normal à h_A et donc $\vec{n} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AC}$ $(3\,; -1)$ est également normal à h_A. Ainsi,

$$\begin{aligned} M\,(x\,;y) \in h_A &\Leftrightarrow \overrightarrow{BM} \cdot \vec{n} = 0 \\ &\Leftrightarrow (x - 0) \times 3 + (y - 11) \times (-1) = 0 \\ &\Leftrightarrow 3x - y + 11 = 0 \end{aligned}$$

Ainsi, une équation de h_A est $3x - y + 11 = 0$.

2. Le droite (BC) est dirigée par $\overrightarrow{BC}$ $(6\,; -12)$ donc également par $\vec{v} = \frac{1}{6}\overrightarrow{BC}$ $(1\,; -2)$. Ainsi, un vecteur normal à (BC) est $\vec{u}\,(2\,;1)$ donc

$$\begin{aligned} M\,(x\,;y) \in (BC) &\Leftrightarrow \overrightarrow{BM} \cdot \overrightarrow{u} = 0 \\ &\Leftrightarrow (x - 0) \times 2 + (y - 11) \times 1 = 0 \\ &\Leftrightarrow 2x + y - 11 = 0 \end{aligned}$$

Ainsi, une équation de (BC) est $2x + y - 11 = 0$.
De plus, la hauteur h_A issue de A est la perpendiculaire à (BC) passant par A donc $\vec{v}$

est normal à h_A. Ainsi,

$$\begin{aligned} M\,(x\,;y) \in h_A &\Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \cdot \vec{v} = 0 \\ &\Leftrightarrow (x-(-6)) \times 1 + (y-3) \times (-2) = 0 \\ &\Leftrightarrow x + 6 - 2y + 6 = 0 \\ &\Leftrightarrow x - 2y + 12 = 0 \end{aligned}$$

donc une équation de h_A est $x - 2y + 12 = 0$.

3. L'orthocentre H de ABC est le point de concours des hauteurs. En particulier, H est le point d'intersection de h_A et h_B donc ses coordonnées sont solutions du système suivant

$$\begin{aligned} \begin{cases} 3x - y + 11 = 0 & L_1 \\ x - 2y + 12 = 0 & L_2 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} 2(3x - y + 11) - (x - 2y + 12) = 0 & L_1 \leftarrow 2L_1 - L_2 \\ (3x - y + 11) - 3(x - 2y + 12) = 0 & L_2 \leftarrow L_1 - 3L_2 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 5x + 10 = 0 \\ 5y - 25 = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ y = 5 \end{cases} \end{aligned}$$

Ainsi, les coordonnées de H sont $(-2\,;5)$.

4. Notons J le point d'intersection de h_A et (BC). Alors, par définition, J est le milieu de $[HH']$. Pour déterminer les coordonnées de H, on commence par trouver celle de J. Comme J est l'intersection de h_A et (BC), ses coordonnées sont solutions du système

$$\begin{aligned} \begin{cases} 2x + y - 11 = 0 & L_1 \\ x - 2y + 12 = 0 & L_2 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} 2(2x + y - 11) + (x - 2y + 12) = 0 & L_1 \leftarrow 2L_1 + L_2 \\ (2x + y - 11) - 2(x - 2y + 12) = 0 & L_2 \leftarrow L_1 - 2L_2 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 5x - 10 = 0 \\ 5y - 35 = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 7 \end{cases} \end{aligned}$$

Ainsi, $J\,(2\,;7)$. On en déduit que $\frac{-2+x_{H'}}{2} = 2$ et $\frac{5+y_{H'}}{2} = 7$ donc $x_{H'} = 2 \times 2 + 2 = 6$ et $y_{H'} = 2 \times 7 - 5 = 9$. Ainsi, $H'\,(6\,;9)$.

5. On a

- $x_A^2 + y_A^2 - 2x_A - 8y_A - 33 = (-6)^2 + 3^2 - 2 \times (-6) - 8 \times 3 - 33 = 0\,;$
- $x_B^2 + y_B^2 - 2x_B - 8y_B - 33 = 0^2 + 11^2 - 2 \times 0 - 8 \times 11 - 33 = 0\,;$
- $x_C^2 + y_C^2 - 2x_C - 8y_C - 33 = 6^2 + (-1)^2 - 2 \times 6 - 8 \times (-1) - 33 = 0\,;$
- $x_{H'}^2 + y_{H'}^2 - 2x_{H'} - 8y_{H'} - 33 = 6^2 + 9^2 - 2 \times 6 - 8 \times 9 - 33 = 0.$

Ainsi, les coordonnées des points A, B, C et H' vérifient l'équation $x^2+y^2-2x-8y-33 = 0$.

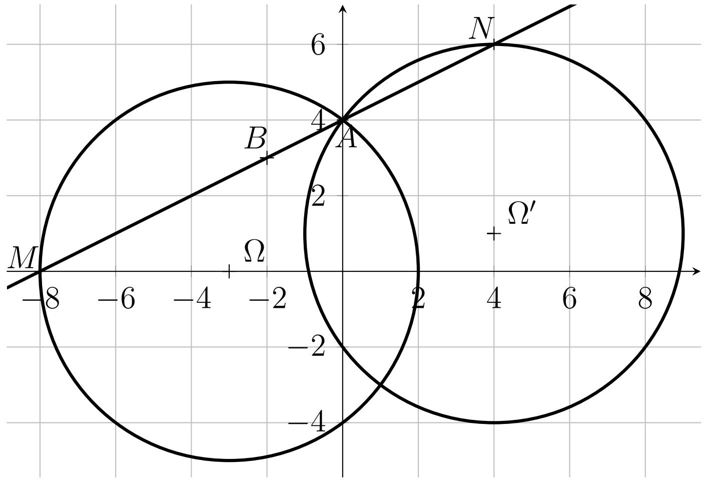
6. On utilise la forme canonique : pour tout réel x, $x^2 - 2x = (x-1)^2 - 1$ et, pour tout réel y, $y^2 - 8y = (y-4)^2 - 16$ donc

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 - 2x - 8y - 33 = 0 &\Leftrightarrow (x-1)^2 - 1 + (y-4)^2 - 16 - 33 = 0 \\ &\Leftrightarrow (x-1)^2 + (y-4)^2 = 50 \\ &\Leftrightarrow (x-1)^2 + (y-4)^2 = \sqrt{50}^2 \end{aligned}$$

Ainsi, $x^2 + y^2 - 2x - 8y - 33 = 0$ une équation du cercle de centre $\Omega\,(1\,;4)$ et de rayon $\sqrt{50} = 5\sqrt{2}$.

Bilan 6 p. 301

1.



2. Une équation de $\mathscr{C}$ est $(x-(-3))^2+(y-0)^2=5^2$ i.e. $x^2+6x+9+y^2=25$ i.e. $x^2+y^2=16-6x$ et une équation de $\mathscr{C}'$ est $(x-4)^2+(y-1)^2=5^2$ i.e. $x^2-8x+16+y^2-2y+1=25$ i.e. $x^2+y^2=8+8x+2y$. Comme A est un point d'intersection de $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$, ses coordonnées vérifient ces deux équations et sont donc solutions du système

$$\begin{cases} x^2+y^2=16-6x \\ x^2+y^2=8+8x+2y \end{cases}$$

Or,

$$\begin{aligned}
\begin{cases} x^2+y^2=16-6x \\ x^2+y^2=8+8x+2y \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} x^2+y^2=16-6x \\ 16-6x=8+8x+2y \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} x^2+y^2=16-6x \\ y=4-7x \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} x^2+(4-7x)^2=16-6x \\ y=4-7x \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} x^2+16-56x+49x^2-16+6x=0 \\ y=4-7x \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} 50x^2-50x=0 \\ y=4-7x \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} x(x-1)=0 \\ y=4-7x \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=4 \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} x=1 \\ y=-3 \end{cases}
\end{aligned}$$

Comme $y_A>0$, on conclut que $A\,(0\,;4)$.

3. Comme $x_A-2y_A+8=0-2\times4+8=0$ et $x_B-2y_B+8=-2-2\times3+8=0$, $x-2y+8=0$ est bien une équation de (AB).

4. Comme M est un point d'intersection de (AB) et $\mathscr{C}$, ses coordonnées sont solutions du système

$$\begin{cases} x-2y+8=0 \\ (x+3)^2+y^2=25 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2y-8 \\ (2y-8+3)^2+y^2-25=0 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=2y-8 \\ (2y-5)^2+y^2-25=0 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=2y-8 \\ 4y^2-20y+25+y^2-25=0 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=2y-8 \\ 5y(y-4)=0 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=-8 \\ y=0 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} x=0 \\ y=4 \end{cases}$$

Le point de coordonnées $(0\,;4)$ est A donc $M\,(-8\,;0)$.
Comme N est un point d'intersection de (AB) et $\mathscr{C}'$, ses coordonnées sont solutions du système

$$\begin{cases} x-2y+8=0 \\ (x-4)^2+(y-1)^2=25 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2y-8 \\ (2y-8-4)^2+(y-1)^2-25=0 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=2y-8 \\ (2y-12)^2+y^2-2y+1-25=0 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=2y-8 \\ 4y^2-48y+144+y^2-2y-24=0 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=2y-8 \\ 5y^2-50y+120=0 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=2y-8 \\ y^2-10y+24=0 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=4 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} x=4 \\ y=6 \end{cases}$$

Le point de coordonnées $(0\,;4)$ est A donc $N\,(4\,;6)$.
On conclut que

$$AM^2+AN^2=(-8-0)^2+(0-4)^2+(4-0)^2+(6-4)^2=64+16+16+4=100.$$