Corrigés des exercices donnés pour le mardi 12 mai 2020

Exercice 98 p. 196

1. On trouve $u_0 = 256$ et $v_0 = 0{,}04$ donc $v_0 < u_0$, $u_5 \approx 3118$ et $v_5 \approx 1{,}3$ donc $v_1 < u_1$ et $u_{10} \approx 37994$ et $v_{10} \approx 44$ donc $v_{10} < u_{10}$.
2. **a.** La fonction `compare` renvoie dans l'ordre u_n, v_n et le plus grand des deux nombres u_n ou v_n pour la valeur de n passée en argument.

   b. Si on exécute la fonction `compare` pour n valant 0, 5, 10, 15, 20 et 25, on constate que $u_n > v_n$. On peut conjecturer que $u_n > v_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
3. La fonction `seuil` détermine le plus petit entier n tel que $u_n \leqslant v_n$. Ainsi, on a $u_{44} \leqslant v_{44}$ donc la conjecture faite dans la question **2.b.** est fausse.

Exercice 111 p. 198. Remarque : l'inégalité $\mathrm{e}^x \geqslant 1 + x$ pour tout réel x a été démontrée dans le cours (propriété 18).

1. Soit un réel x. L'inégalité précédente est vraie pour tout réel donc elle est vraie pour $-x$. Ainsi, $1 + (-x) \leqslant \mathrm{e}^{-x}$ i.e. $1 - x \leqslant \mathrm{e}^{-x}$.
2. Soit un réel $x < 1$. Alors, $\mathrm{e}^{-x} \geqslant 1 - x > 0$ donc, par décroissance de la fonction inverse sur $]0\,;+\infty[$, $\frac{1}{\mathrm{e}^{-x}} \leqslant \frac{1}{1-x}$ i.e. $\mathrm{e}^x \leqslant \frac{1}{1-x}$.

Exercice 132 p. 202
Partie A

1. La fonction f est dérivable sur $[0\,;+\infty[$ comme somme de fonctions dérivables et, pour tout réel x, $g'(x) = \mathrm{e}^x + 1$. Or, pour tout réel $x \in [0\,;+\infty[$, $\mathrm{e}^x > 0$ donc $g'(x) > 0$. On a donc le tableau suivant :

x	0	$+\infty$
Variation de g	3	↗

2. On déduit du tableau précédent que, pour tout réel $x \geqslant 0$, $g(x) \geqslant 3$ donc $g(x) > 0$.

Partie B

1. La fonction f est dérivable sur $[0\,;+\infty[$ comme somme et quotient de fonctions dérivables et, pour tout réel $x \geqslant 0$,

$$f'(x) = 1 - \frac{1 \times \mathrm{e}^x - (3+x)\mathrm{e}^x}{(\mathrm{e}^x)^2} = 1 - \frac{\mathrm{e}^x(1-(3+x))}{(\mathrm{e}^x)^2} = 1 - \frac{-2-x}{\mathrm{e}^x} = \frac{\mathrm{e}^x + x + 2}{\mathrm{e}^x}$$

   donc on a bien $f'(x) = \frac{g(x)}{\mathrm{e}^x}$.
2. D'après la question **2.** de la **Partie A**, pour tout réel $x \geqslant 0$, $g(x) > 0$ donc, comme $\mathrm{e}^x > 0$, $f'(x) > 0$.

   Ainsi, f est strictement croissante sur $[0\,;+\infty[$.

Bilan 2 p. 207

Partie A

1. **a.** La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme produit de fonctions dérivables et, pour tout réel x,
$$f'(x) = 3 \times \mathrm{e}^x + (3x-1) \times \mathrm{e}^x = (3+3x-1)\mathrm{e}^x = (3x+2)\mathrm{e}^x.$$
   b. Pour tout réel x, $\mathrm{e}^x > 0$ donc le signe de $f'(x)$ est le signe de $3x+2$. Ainsi, $f'(x) \leqslant 0$ si $x \leqslant -\frac{2}{3}$ et $f'(x) \geqslant 0$ si $x \geqslant -\frac{2}{3}$.

   c. On en déduit le tableau suivant :

x	$-\infty$		$-\frac{2}{3}$		$+\infty$
Signe de $f'(x)$		$-$	0	$+$	
Variation de f		$\searrow$	$-3\mathrm{e}^{-\frac{2}{3}}$	$\nearrow$	

2. **a.** Chercher le point d'intersection de la courbe $\mathscr{C}$ avec l'axe des abscisses revient à résoudre $f(x) = 0$. Or, comme $\mathrm{e}^x \neq 0$ pour tout réel x, on a
$$f(x) = 0 \Leftrightarrow 3x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{3}.$$
   Ainsi, les coordonnées du point d'intersection de la courbe $\mathscr{C}$ avec l'axe des abscisses sont $\left(\frac{1}{3}\,;0\right)$.

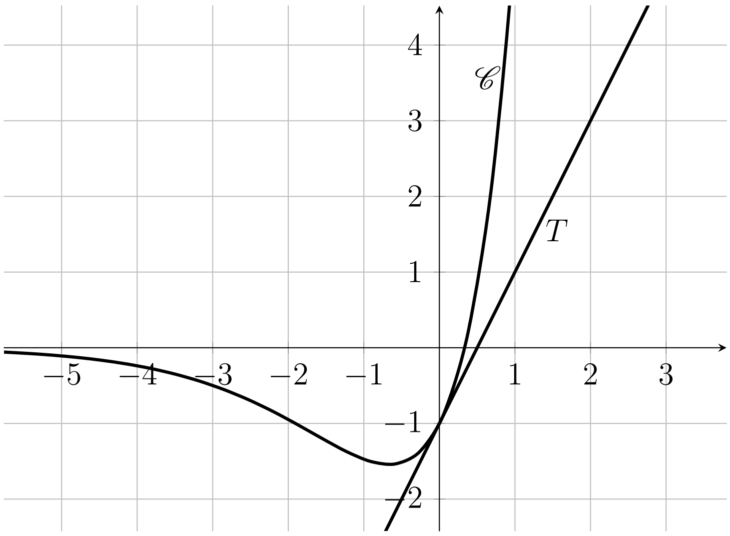
   b. Pour tout réel x, $\mathrm{e}^x > 0$ donc le signe de $f(x)$ est le signe de $3x-1$. On a donc le tableau de signe suivant :

x	$-\infty$		$\frac{1}{3}$		$+\infty$
Signe de $f(x)$		$-$	0	$+$	

3. **a.** Chercher le point d'intersection de la courbe $\mathscr{C}$ avec l'axe des ordonnées revient à calculer $f(0)$. Or, $f(0) = (3 \times 0 - 1)\mathrm{e}^0 = -1$. Ainsi, les coordonnées du point d'intersection de la courbe $\mathscr{C}$ avec l'axe des ordonnées sont $(0\,;-1)$.

   b. L'équation réduite de T est $y = f'(0)(x-0) + f(0)$. Or, $f'(0) = (3 \times 0 + 2)\mathrm{e}^0 = 2$ et $f(0) = -1$ donc $T : y = 2x - 1$.

4. On aboutit au graphique suivant :



Bilan 3 p. 207

1. La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme somme et composée de fonctions dérivables et, pour tout réel x,
$$f'(x) = 3 - 2 \times (-1)\mathrm{e}^{-x} = 3 + 2\mathrm{e}^{-x}.$$
Or, pour tout réel x, $\mathrm{e}^{-x} > 0$ donc $f'(x) > 0$. Ainsi, f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ donc f n'a pas de minimum sur $\mathbb{R}$. L'affirmation est FAUSSE.
2. La tangente T au point d'abscisse 0 a pour équation $y = f'(0)(x-0) + f(0)$. Or, $f'(0) = 3 + 2 = 5$ et $f(0) = 3 \times 0 - 2 = -2$. Ainsi, $T : y = 5x - 2$. Notons P le point de coordonnées $\left(\frac{2}{5}\,;0\right)$. Alors, $5x_P - 2 = 5 \times \frac{2}{5} - 2 = 2 - 2 = 0 = y_P$ donc $P \in T$. Ainsi, l'affirmation est VRAIE.
3. Comme $f(0) = -2$, l'affirmation est FAUSSE.
4. On a vu que f est strictement croissante est sur $\mathbb{R}$. Ainsi, pour tout réel $x > 0$, $f(x) > f(0)$. Or, $f(0) = -2$ donc, pour tout réel $x > 0$, $f(x) > -2$. L'affirmation est VRAIE.