Corrigés des exercices donnés pour le mercredi 10 juin 2020

Exercice 11 p. 280. Notons $\mathcal{D}$ la droite perpendiculaire à d passant par $A\,(0\,;4)$. Alors, un vecteur directeur de d est un vecteur normal à $\mathcal{D}$. On en déduit que $\vec{v}\,(4\,;1)$ est normal à $\mathcal{D}$. Comme $\mathcal{D}$ passe par A, on en déduit que

$$\begin{aligned} M\,(x\,;y) \in \mathcal{D} &\Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \cdot \vec{v} = 0 \\ &\Leftrightarrow (x-0)\times 4 + (y-4)\times 1 = 0 \\ &\Leftrightarrow 4x + y - 4 = 0 \end{aligned}$$

donc une équation cartésienne de $\mathcal{D}$ est $4x+y-4=0$. Or, le projeté orthogonal H de A sur d est le point d'intersection de d et $\mathcal{D}$ donc ses coordonnées sont solutions du système :

$$(S)\begin{cases} x-4y+5=0 \\ 4x+y-4=0 \end{cases}$$

On résout donc ce système :

$$\begin{aligned} (S)\begin{cases} x-4y+5=0 & L_1 \\ 4x+y-4=0 & L_2 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} 4(x-4y+5)-(4x+y-4)=0 & L_1 \leftarrow 4L_1 - L_2 \\ x-4y+5+4(4x+y-4)=0 & L_2 \leftarrow L_1 + 4L_2 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} -17y+24=0 \\ 17x-11=0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} y=\frac{24}{17} \\ x=\frac{11}{17} \end{cases} \end{aligned}$$

Ainsi, les coordonnées de H sont $\left(\frac{11}{17}\,;\frac{24}{17}\right)$.

Exercice 13 p. 280.

1. On a $f(4)=4^2-4\times 4+1=1$ donc les coordonnées de A sont $(4\,;1)$. Il s'ensuit que les coordonnées du projeté orthogonal de A sur l'axe des ordonnées sont $(0\,;1)$.
2. Notons S le sommet de $\mathscr{P}$. L'abscisse de S est $-\frac{-4}{2\times 1}=2$ et son ordonnée est $f(2)=2^2-4\times 2+1=-3$ donc $S\,(2\,;-3)$. Notons $\mathcal{D}$ la droite perpendiculaire à d passant par $S\,(2\,;-3)$. Alors, un vecteur directeur de d est un vecteur normal à $\mathcal{D}$. On en déduit que $\vec{v}\,(-1\,;-1)$ est normal à $\mathcal{D}$ donc le vecteur $-\vec{v}\,(1\,;1)$ aussi. Comme $\mathcal{D}$ passe par S, on en déduit que

$$\begin{aligned} M\,(x\,;y) \in \mathcal{D} &\Leftrightarrow \overrightarrow{SM} \cdot (-\vec{v}) = 0 \\ &\Leftrightarrow (x-2)\times 1 + (y-(-3))\times 1 = 0 \\ &\Leftrightarrow x+y+1=0 \end{aligned}$$

donc une équation cartésienne de $\mathcal{D}$ est $x+y+1=0$. Or, le projeté orthogonal H de S sur d est le point d'intersection de d et $\mathcal{D}$ donc ses coordonnées sont solutions du système :

$$(S)\begin{cases} -x+y+7=0 \\ x+y+1=0 \end{cases}$$

On résout donc ce système :

$$(S)\begin{cases}-x+y+7=0 & L_1\\ x+y+1=0 & L_2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}(x+y+1)-(-x+y+7)=0 & L_1 \leftarrow L_2-L_1\\ (-x+y+7)+(x+y+1)=0 & L_2 \leftarrow L_1+L_2\end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases}2x-6=0\\ 2y+8=0\end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases}x=3\\ y=-4\end{cases}$$

Ainsi, les coordonnées de H sont $(3\,;-4)$.

Exercice 68 p. 288

1. FAUX : le projeté orthogonal de E sur (AD) est F.
2. VRAI.
3. FAUX : le projeté orthogonal de K sur (BE) est le milieu de [BC].
4. VRAI.

Exercice 71 p. 288

1. Comme $-x_A+y_A+9=-0+9+9=18\neq 0$, le point A n'appartient pas à d.
2. Le vecteur $\vec{n}\,(-1\,;1)$ est normal à d.
3. Le vecteur $\vec{v}\,(-1\,;-1)$ est un vecteur directeur de d donc $-\vec{v}\,(1\,;1)$ aussi. Alors, $-\vec{v}\,(1\,;1)$ est normal à d'. Comme d' passe par A, on en déduit que

$$\begin{aligned}M\,(x\,;y)\in d' &\Leftrightarrow \overrightarrow{AM}\cdot(-\vec{v})=0\\ &\Leftrightarrow (x-0)\times 1+(y-9)\times 1=0\\ &\Leftrightarrow x+y-9=0\end{aligned}$$

donc une équation cartésienne de d' est $x+y-9=0$.

4. Le projeté orthogonal H de A sur d est le point d'intersection de d et d' donc ses coordonnées sont solutions du système :

$$(S)\begin{cases}-x+y+9=0\\ x+y-9=0\end{cases}$$

On résout donc ce système :

$$(S)\begin{cases}-x+y+9=0 & L_1\\ x+y-9=0 & L_2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}(x+y-9)-(-x+y+9)=0 & L_1 \leftarrow L_2-L_1\\ -x+y+9+(x+y-9)=0 & L_2 \leftarrow L_1+L_2\end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases}2x-18=0\\ 2y=0\end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases}x=9\\ y=0\end{cases}$$

Ainsi, les coordonnées de H sont $(9\,;0)$.

Exercice 75 p. 289. La droite d : $y=2$ est parallèle à l'axe de abscisse donc une perpendiculaire à d est parallèle à l'axe de ordonnées. Ainsi, la perpendiculaire à d passant par H est la droite d'équation $x=5$. Ainsi, pour tout point M de cette droite, le projeté de M sur d est H. Par exemple, H est le projeté de $A\,(5\,;0)$ sur d.