Corrigés des exercices donnés pour le mardi 5 mai 2020

Exercice 114 p. 190

1. a. *Rappel.* Une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ est paire si, pour tout réel x, $f(-x) = f(x)$ et impaire si, pour tout réel x, $f(-x) = -f(x)$.

Soit $x \in \mathbb{R}$. Alors, $f(-x) = \dfrac{\mathrm{e}^{-x} + \mathrm{e}^{-x}}{2} = f(x)$ donc f est paire et $g(-x) = \dfrac{\mathrm{e}^{-x} - \mathrm{e}^{x}}{2} = -\dfrac{\mathrm{e}^{x} - \mathrm{e}^{-x}}{2} = -g(x)$ donc g est impaire.

b. La courbe d'une fonction paire est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées et celle d'une fonction impaire est symétrique par rapport à l'origine du repère donc $\mathscr{C}_1$ est la courbe de g et $\mathscr{C}_2$ est la courbe de f.

2. a. Les fonctions f et g sont dérivables sur $\mathbb{R}$ comme somme et composée de fonctions dérivables. De plus, pour tout réel x,

$$f'(x) = \frac{1}{2}\left(\mathrm{e}^{x} - \mathrm{e}^{-x}\right) = g(x)$$

et

$$g'(x) = \frac{1}{2}\left(\mathrm{e}^{x} - (-\mathrm{e}^{x})\right) = \frac{1}{2}\left(\mathrm{e}^{x} + \mathrm{e}^{x}\right) = f(x).$$

b. Pour tout réel x, $\mathrm{e}^{x} > 0$ et $\mathrm{e}^{-x} > 0$ donc $f(x) > 0$. Ainsi, $g'(x) > 0$ donc g est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

De plus,

$$f'(x) \geqslant 0 \Leftrightarrow \mathrm{e}^{x} - \mathrm{e}^{-x} \geqslant 0 \Leftrightarrow \mathrm{e}^{x} \geqslant \mathrm{e}^{-x} \underset{\mathrm{e}^{x}>0}{\Leftrightarrow} \mathrm{e}^{x} \times \mathrm{e}^{x} \geqslant \mathrm{e}^{-x} \times \mathrm{e}^{x} \Leftrightarrow \mathrm{e}^{2x} \geqslant \mathrm{e}^{0} \Leftrightarrow 2x \geqslant 0 \Leftrightarrow x \geqslant 0$$

Ainsi, $f'(x) \geqslant 0$ si $x \in [0\,;+\infty[$ et $f'(x) \leqslant 0$ si $x \in]-\infty\,;0]$ donc f est décroissante sur $]-\infty\,;0]$ et f est décroissante sur $]-\infty\,;0]$.

Remarque. Une autre façon d'obtenir le signe de f' est d'utiliser que $f' = g$, g est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et $g(0) = 0$ donc $g(x) \leqslant 0$ si $x \leqslant 0$ et $g(x) \geqslant 0$ si $x \geqslant 0$.

On aboutit donc au tableau de variation suivants :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
Variation de f		$\searrow$	1	$\nearrow$	

x	$-\infty$		$+\infty$
Variation de g		$\nearrow$	

Exercice 115 p. 198

1. **a.** Pour tout réel x,

$$h(x) = \frac{\frac{e^x - e^{-x}}{2}}{\frac{e^x + e^{-x}}{2}} = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \times \frac{2}{e^x + e^{-x}} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}.$$

En multipliant numérateur et dénominateur par e^x, il vient

$$h(x) = \frac{(e^x - e^{-x}) \times e^x}{(e^x + e^{-x}) \times e^x} = \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1}.$$

b. En ajoutant et en retranchant 1 au numérateur de cette dernière forme, on obtient :

$$h(x) = \frac{e^{2x} + 1 - 1 - 1}{e^{2x} + 1} = \frac{e^{2x} + 1}{e^{2x} + 1} - \frac{2}{e^{2x} + 1} = 1 - \frac{2}{e^{2x} + 1}$$

Remarque. On peut aussi partir du membre de droite de l'égalité, mettre au même dénominateur et retrouver la forme de $h(x)$.

2. Utilisant l'expression de h obtenue à la question **1.b.** Ainsi, $h = 1 - 2 \times \frac{1}{u}$ où $u : x \mapsto e^{2x} + 1$. Comme u est la somme d'une constante et de la composée de la fonction affine $x \mapsto 2x$ suivie de la fonction exp, u est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout réel x, $u'(x) = 2e^{2x}$. Ainsi, h est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout réel x,

$$h'(x) = 0 - 2 \times \left[-\frac{2e^{2x}}{(e^{2x} + 1)^2} \right] = \frac{4e^{2x}}{(e^{2x} + 1)^2}.$$

Comme la fonction exp est à valeurs strictement positives, pour tout réel x, $h'(x) > 0$ donc h est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Exercice 120 p. 199

1. **a.** Graphiquement, $f(0) = -1$.

   b. Or, $f(0) = (a \times 0 + b)e^0 = b$ donc $b = -1$.

2. **a.** Comme $f'(0)$ est le coefficient directeur de T, $f'(0) = 1$.

   b. La fonction f est le produit de la fonction affine $x \mapsto ax + b$ et de la fonction exp donc f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout réel x,

$$f'(x) = a \times e^x + (ax + b) \times e^x = (ax + a + b)e^x.$$

   c. Ainsi, $1 = f'(0) = (a + b)e^0 = a + b$ donc $a = 1 - b = 1 - (-1) = 2$.
   On conclut que, pour tout réel x, $f(x) = (2x - 1)e^x$.

Bilan 4 p. 207

Partie A

1. Le nombre dérivé $f'(t)$ est le coefficient directeur de la tangente à la courbe en t. Ainsi, $f'(t)$ est maximal lorsque la pente de la tangente est maximale. On en déduit que la vitesse est maximale à l'instant 0.

2. Comme $\mathscr{C}_1$ est au-dessus de $\mathscr{C}_2$, on conclut que $\mathscr{C}_2$ correspond à la personne la plus corpulente.

Partie B

1. La fonction f est le produit de la fonction affine $t \mapsto 2t$ et de la composée de la fonction affine $t \mapsto -t$ suivie de la fonction exponentielle. Ainsi, f est dérivable sur $[0\,;12]$ et, pour tout réel t,

$$f'(t) = 2 \times \mathrm{e}^{-t} + 2t \times (-\mathrm{e}^{-t}) = 2\mathrm{e}^{-t} - 2t\mathrm{e}^{-t} = 2(1-t)\mathrm{e}^{-t}.$$

Pour tout réel $t \in [0\,;12]$, $2\mathrm{e}^{-t} > 0$ donc le signe de $f'(t)$ est le signe de $1-t$. Ainsi, $f'(t) \geqslant 0$ si $t \in [0\,;1]$ et $f'(t) \leqslant 0$ si $t \in [1\,;12]$.
On a donc le tableau suivant :

x	0		1		12
Signe de $f'(x)$		$+$	0	$-$	
Variation de f	0	$\nearrow$	$2\mathrm{e}^{-1}$	$\searrow$	$24\mathrm{e}^{-12}$

2. Le taux est maximal à l'instant 1 i.e. après 1 heure après l'ingestion. Le taux maximal est $C(1) = 2\mathrm{e}^{-1} \approx 0{,}74$ g/L.

3. En faisant un tableau à l'aide de la calculatrice, on voit que le taux repasse en dessous de 0,2 au bout d'environ 3,58 h soit environ 3 h 35 min.

3.53	0.2068927
3.54	0.2054144
3.55	0.2039449
3.56	0.2024844
3.57	0.2010328
3.58	0.19959
3.59	0.198156
3.6	0.1967308