Corrigés des exercices de la fiche n°3

Exercice 1.

a) (u_n) est définie à partir du rang 0. Les trois premiers termes sont $u_0 = -0^2 + 0 + 1 = 1$, $u_1 = -1^2 + 1 + 1 = 1$ et $u_2 = -2^2 + 2 + 2 = 0$.

b) (u_n) est définie pour tout entier n tel que $n - 3 \neq 0$ i.e. $n \neq 3$. Puisque l'énoncé demande un rang à partir duquel (u_n) est définie, on peut dire que (u_n) est définie à partir du rang 4. Dans ce cas, les trois premiers termes sont $u_4 = \frac{1}{4-3} = 1$, $u_5 = \frac{1}{5-3} = \frac{1}{2}$ et $u_6 = \frac{1}{6-3} = \frac{1}{3}$.

c) (u_n) est définie pour tout entier n tel que $n^2 - 4 \geqslant 0$ i.e. $n \geqslant 2$. Les trois premiers termes sont $u_2 = \sqrt{2^2 - 4} = 0$, $u_3 = \sqrt{3^2 - 4} = \sqrt{5}$ et $u_4 = \sqrt{4^2 - 4} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$.

Exercice 2.

1. Les trois premiers termes de (u_n) sont $u_0 = \frac{0}{0+1} = 0$, $u_1 = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$ et $u_2 = \frac{2}{2+1} = \frac{2}{3}$.

2. On a :

$$u_n + 1 = \frac{n}{n+1} + 1 = \frac{n}{n+1} + \frac{n+1}{n+1} = \frac{n+n+1}{n+1} = \frac{n+2}{n+1}$$

$$u_{n+1} = \frac{n+1}{(n+1)+1} = \frac{n+1}{n+2}$$

$$u_n - 1 = \frac{n}{n+1} - 1 = \frac{n}{n+1} - \frac{n+1}{n+1} = \frac{n-(n+1)}{n+1} = \frac{n-n-1}{n+1} = -\frac{1}{n+1}$$

$$u_{n-1} = \frac{n-1}{(n-1)+1} = \frac{n-1}{n-1+1} = \frac{n-1}{n}$$

Exercice 3. a) $u_0 = 1$, $u_1 = u_0^2 + u_0 = 1 + 1 = 2$, $u_2 = u_1^2 + u_1 = 2^2 + 2 = 6$.

b) $u_5 = 1$, $u_6 = u_{5+1} = u_5 - 5 = 1 - 5 = -4$, $u_7 = u_{6+1} = u_6 - 6 = -10$.

c) $u_1 = \frac{1}{2}$, $u_2 = \frac{u_1}{u_1+1} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}+1} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{3}{2}} = \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$ et $u_3 = \frac{u_2}{u_2+1} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{3}+1} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{4}{3}} = \frac{1}{3} \times \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$

Exercice 4.

1. Les trois premiers termes de (u_n) sont $u_0 = 1$, $u_1 = u_{0+1} = u_0^2 - 5 \times 0 = 1^2 - 0 = 1$ et $u_2 = u_{1+1} = u_1^2 - 5 \times 1 = 1^2 - 5 = -4$.

2. Par définition, $u_{n+2} = u_{(n+1)+1} = u_{n+1}^2 - 5(n+1)$. Or, $u_{n+1} = u_n^2 - 5n$ donc $u_{n+2} = (u_n - 5n)^2 - 5(n+1) = u_n^2 - 2 \times u_n \times 5n + (5n)^2 - 5n - 5 = u_n^2 - 10nu_n + 25n^2 - 5n - 5$.

Exercice 5.

1. Par définition, $a_1 = \frac{3a_0+2b_0}{5} = \frac{3\times1+2\times2}{5} = \frac{7}{5}$ et $b_1 = \frac{2\times a_0+3\times b_0}{5} = \frac{2\times1+3\times2}{5} = \frac{8}{5}$.

De même, $a_2 = \frac{3a_1+2b_1}{5} = \frac{3\times\frac{7}{5}+2\times\frac{8}{5}}{5} = \frac{37}{25}$ et $b_2 = \frac{2\times a_1+3\times b_1}{5} = \frac{2\times\frac{7}{5}+3\times\frac{8}{5}}{5} = \frac{38}{25}$.

2. Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors,

$$\begin{aligned} s_{n+1} = a_{n+1} + b_{n+1} &= \frac{3a_n + 2b_n}{5} + \frac{2a_n + 3b_n}{5} \\ &= \frac{3a_n + 2b_n + 2a_n + 3b_n}{5} = \frac{5a_n + 5b_n}{5} = a_n + b_n = s_n. \end{aligned}$$

Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $s_{n+1} = s_n$ donc (s_n) est constante.

3. Par définition, $s_0 = a_0 + b_0 = 1 + 2 = 3$. Comme (s_n) est constante, on en déduit que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $s_n = 3$. Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n + b_n = 3$ i.e. $b_n = 3 - a_n$.

Exercice 6.

1. a. Par définition, $u_2 = u_{0+2} = 2u_{0+1} - u_0 = 2u_1 - u_0 = 2 \times 1 - 0 = 2$. De même, $u_3 = 2u_2 - u_1 = 2 \times 2 - 1 = 3$ et $u_4 = 2u_3 - u_2 = 2 \times 3 - 2 = 4$.

b. On peut conjecturer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = n$.

2. a. Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors, $d_{n+1} = u_{(n+1)+1} + u_{n+1} = u_{n+2} - u_{n+1}$. Or, $u_{n+2} = 2u_{n+1} - u_n$ donc $d_{n+1} = 2u_{n+1} - u_n - u_{n+1} = u_{n+1} - u_n = d_n$. Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $d_{n+1} = d_n$ donc (d_n) est constante.

b. Par définition, $d_0 = u_1 - u_0 = 1 - 0 = 1$ donc, comme (d_n) est constante, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $d_n = 1$ i.e. $u_{n+1} - u_n = 1$ et donc $u_{n+1} = u_n + 1$.

c. Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors, $u_n = u_{n-1} + 1 = u_{n-2} + 1 + 1 = \cdots = u_0 + 1 + \cdots + 1 + 1 = 0 + 1 + \cdots + 1 + 1 = n$ car la somme contient exactement n fois le nombre 1 (puisque, partant de u_n, il a fallu réécrire n fois la relation $u_k = u_{k-1} + 1$ pour aboutir à u_0).

Exercice 7.

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors, $u_{n+1} = (n+1)^2 + 3 = n^2 + 2n + 1 + 3 = n^2 + 2n + 4$ donc $u_{n+1} - u_n = n^2 + 2n + 4 - (n^2 + 3) = n^2 + 2n + 4 - n^2 - 3 = 2n + 1 \geqslant 0$ car $n \geqslant 0$. Ainsi, (u_n) est croissante.

2. Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors, $0 < n + 1 \leqslant n + 2$ donc $\frac{1}{n+2} \geqslant \frac{1}{n+3}$ i.e. $u_n \geqslant u_{n+1}$. Ainsi, (u_n) est décroissante.

3. Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors,

$$\begin{aligned} w_{n+1} - w_n &= \frac{n+1}{n+2} - \frac{n}{n+1} = \frac{(n+1)^2}{(n+1)(n+2)} - \frac{n(n+2)}{(n+1)(n+2)} \\ &= \frac{n^2 + 2n + 1 - (n^2 + 2n)}{(n+1)(n+2)} = \frac{1}{(n+1)(n+2)} \geqslant 0 \end{aligned}$$

car $n \geqslant 0$. Ainsi, (w_n) est croissante.

4. Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors, $0 < n + 3 \leqslant n + 4$ donc $\frac{1}{n+3} \geqslant \frac{1}{n+4}$. Comme $-1 < 0$, on en déduit que $-\frac{1}{n+3} \leqslant -\frac{1}{n+4}$ et donc $1 - \frac{1}{n+3} \leqslant 1 - \frac{1}{n+4}$ i.e. $t_n \leqslant t_{n+1}$. On conclut donc que (t_n) est croissante.

5. Comme $2 > 0$ et $5 > 0$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $s_n > 0$. Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors, $s_{n+1} = \frac{2^{n+1}}{5^{n+1}} = \frac{2^n \times 2}{5^n \times 5}$ donc

$$\frac{s_{n+1}}{s_n} = \frac{\frac{2^n \times 2}{5^n \times 5}}{\frac{2^n}{5^n}} = \frac{2^n \times 2}{5^n \times 5} \times \frac{5^n}{2^n} = \frac{2}{5} \leqslant 1$$

donc (s_n) est décroissante.

6. Comme $2 > 0$ et $7 > 0$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $z_n > 0$. Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors, $z_{n+1} = \frac{2^{n+1}}{7^{n+1+1}} = \frac{2^n \times 2}{7^{n+1} \times 7}$ donc

$$\frac{z_{n+1}}{z_n} = \frac{\frac{2^n \times 2}{7^{n+1} \times 7}}{\frac{2^n}{7^{n+1}}} = \frac{2^n \times 2}{7^{n+1} \times 7} \times \frac{7^{n+1}}{2^n} = \frac{2}{7} \leqslant 1$$

donc (z_n) est décroissante.

Exercice 8.

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors, $u_{n+1} - u_n = u_n(1 - 2u_n) - u_n = u_n - 2u_n^2 - u_n = -2u_n^2 \leqslant 0$ donc (u_n) est décroissante.

2. Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors, $v_{n+1} - v_n = v_n - 2n - v_n = -2n \leqslant 0$ car $n \geqslant 0$. Ainsi, (v_n) est décroissante.

3. Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors, $w_{n+1} - w_n = w_n + n - 5 - w_n = n - 5$. Or, $n - 5 \geqslant 0$ si et seulement si $n \geqslant 5$ donc (w_n) est croissante à partir du rang 5.

4. Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors, $t_{n+1} - t_n = t_n + (-1)^n - t_n = (-1)^n$. Or, si n est pair $(-1)^n \geqslant 0$ et, si n est impair, $(-1)^n \leqslant 0$. Ainsi, le signe de $t_{n+1} - t_n$ alterne avec la parité de n donc (t_n) n'est monotone à partir d'aucun rang.

Exercice 9.

1. À l'aide de la calculatrice, on peut conjecturer que (u_n) est croissante à partir du rang 3.

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Alors,

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \frac{2^{n+1}}{(n+1)^2} - \frac{2^n}{n^2} = \frac{2^n \times 2}{(n+1)^2} - \frac{2^n}{n^2} = \frac{2^n \times 2 \times n^2}{n^2(n+1)^2} - \frac{2^n(n+1)^2}{n^2(n+1)^2} \\ &= \frac{2^n(2n^2 - (n+1)^2)}{n^2(n+1)^2} = \frac{2^n(2n^2 - n^2 - 2n - 1)}{n^2(n+1)^2} = \frac{2^n(n^2 - 2n - 1)}{n^2(n+1)^2} \end{aligned}$$

Comme $2^n > 0$ et $n^2(n+1)^2 > 0$, le signe de $u_{n+1} - u_n$ est le signe de $n^2 - 2n - 1$. Or, en utilisant la forme canonique, $n^2 - 2n - 1 = (n-1)^2 - 1 - 1 = (n-1)^2 - 2$. Si on suppose $n \geqslant 3$ (conformément à notre conjecture) alors $n - 1 \geqslant 2$ donc $(n-1)^2 \geqslant 4$ donc $(n-1)^2 - 2 \geqslant 2$. Ainsi, pour tout $n \geqslant 3$, $u_{n+1} - u_n \geqslant 0$ donc (u_n) est croissante à partir du rang 3.

Exercice 10.

1. À l'aide de la calculatrice, on peut conjecturer que (u_n) est croissante à partir du rang 1.

2. Soit $n \in \mathbb{N}$. Comme $1{,}5 > 0$ et $n \geqslant 0$, $1{,}5^n > 0$ et $n + 1 > 0$ donc $u_n > 0$. De plus,

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\frac{1{,}5^{n+1}}{(n+1)+1}}{\frac{1{,}5^n}{n+1}} = \frac{1{,}5^n \times 1{,}5}{n+2} \times \frac{n+1}{1{,}5^n} = \frac{1{,}5(n+1)}{n+2}$$

En multipliant numérateur et dénominateur par 2, il vient $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{3(n+1)}{2(n+2)} = \frac{3n+3}{2n+4}$.

3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $2n + 4 > 0$ donc

$$\frac{3n+3}{2n+4} \geqslant 1 \Leftrightarrow 3n + 3 \geqslant 2n + 4 \Leftrightarrow 3n - 2n \geqslant 4 - 3 \Leftrightarrow n \geqslant 1$$

Ainsi, $\frac{u_{n+1}}{u_n} \geqslant 1$ pour tout $n \geqslant 1$ donc (u_n) est croissante à partir du rang 1.

Exercice 11.

1. Graphiquement, la suite (u_n) semble alterner entre deux valeurs et donc ne pas être monotone.

2. Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors,

$$u_{n+2} = \frac{1 - u_{n+1}}{1 + u_{n+1}} = \frac{1 - \frac{1-u_n}{1+u_n}}{1 + \frac{1-u_n}{1+u_n}} = \frac{\frac{1+u_n-(1-u_n)}{1+u_n}}{\frac{1+u_n+1-u_n}{1+u_n}} = \frac{\frac{2u_n}{1+u_n}}{\frac{2}{1+u_n}} = \frac{2u_n}{1+u_n} \times \frac{1+u_n}{2} = u_n$$

3. La question précédente montre que les suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont constantes. En effet, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{2(n+1)} = u_{2n+2} = u_{2n}$ et $u_{2(n+1)+1} = u_{2n+1+2} = u_{2n+1}$. On en déduit que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, si n est pair alors $u_n = u_0 = 3$ et, si n est impair, $u_n = u_1 = -\frac{1}{2}$.

4. Le 1000-ième est u_{999} donc, comme 999 est impair, $u_{999} = -\frac{1}{2}$.

Exercice 12. Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors, $a_{n+1} = \frac{3(n+1)-1}{4(n+1)+5} = \frac{3n+2}{4n+9}$ donc

$$\begin{aligned} a_{n+1} - a_n &= \frac{3n+2}{4n+9} - \frac{3n-1}{4n+5} = \frac{(3n+2)(4n+5) - (3n-1)(4n+9)}{(4n+9)(4n+5)} \\ &= \frac{12n^2 + 15n + 8n + 10 - (12n^2 + 27n - 4n - 9)}{(4n+9)(4n+5)} \\ &= \frac{12n^2 + 23n + 10 - (12n^2 + 23n - 9)}{(4n+9)(4n+5)} \\ &= \frac{12n^2 + 23n + 10 - 12n^2 - 23n + 9}{(4n+9)(4n+5)} \\ &= \frac{19}{(4n+9)(4n+5)} \geqslant 0 \end{aligned}$$

car $n \geqslant 0$. Ainsi, (a_n) est croissante.

Exercice 13. On considère, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la suite (t_n) définie par $t_n = \frac{2^n}{n+2}$.

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Comme $2 > 0$ et $n \geqslant 0$, $2^n > 0$ et $n + 1 > 0$ donc $t_n > 0$.

2. Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors, $t_{n+1} = \frac{2^{n+1}}{n+1+2} = \frac{2^n \times 2}{n+3}$ donc

$$\frac{t_{n+1}}{t_n} - 1 = \frac{\frac{2^n \times 2}{n+3}}{\frac{2^n}{n+2}} - 1 = \frac{2^n \times 2}{n+3} \times \frac{n+2}{2^n} - 1 = \frac{2(n+2)}{n+3} - 1 = \frac{2n+4-(n+3)}{n+3} = \frac{n+1}{n+3}.$$

3. Comme $n \geqslant 0$, $n + 1 \geqslant 0$ et $n + 3 > 0$ donc $\frac{t_{n+1}}{t_n} - 1 \geqslant 0$ et ainsi $\frac{t_{n+1}}{t_n} \geqslant 1$. On conclut donc que (t_n) est croissante.