Fiche d'exercices n°3. — Révision sur les suites réelles

Exercice 1. Dans chacun des cas suivants, déterminer à partir de quel rang la suite (u_n) est définie et calculer les 3 premiers termes de la suite.

$$\text{a) } u_n = -n^2 + n + 1 \qquad \text{b) } u_n = \frac{1}{n-3} \qquad \text{c) } u_n = \sqrt{n^2 - 4}$$

Exercice 2. On considère la suite (u_n) définie, pour tout $n \in \mathbb{N}$, par $u_n = \frac{n}{n+1}$.

1. Calculer les 3 premiers termes de cette suite.

2. Soit $n \in \mathbb{N}$. Exprimer $u_n + 1$, u_{n+1}, $u_n - 1$ et u_{n-1} en fonction de n.

Exercice 3. Dans chaque cas, calculer les 3 premiers termes de la suite (u_n)

$$\text{a) } \begin{cases} u_0 = 1 \\ \text{pour tout } n \geqslant 0,\ u_{n+1} = u_n^2 + u_n \end{cases} \qquad \text{b) } \begin{cases} u_5 = 1 \\ \text{pour tout } n \geqslant 5,\ u_{n+1} = u_n - n \end{cases}$$

$$\text{c) } \begin{cases} u_1 = \frac{1}{2} \\ \text{pour tout } n \geqslant 1,\ u_{n+1} = \frac{u_n}{u_n+1} \end{cases}$$

Exercice 4. On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n^2 - 5n$.

1. Calculer les 3 premiers termes de (u_n).

2. Soit $n \in \mathbb{N}$. Exprimer u_{n+2} en fonction de u_n et de n.

Exercice 5. On considère deux suites (a_n) et (b_n) définies par

$$\begin{cases} a_0 = 1 \\ \text{pour tout } n \in \mathbb{N},\ a_{n+1} = \dfrac{3a_n + 2b_n}{5} \end{cases} \qquad \text{et} \qquad \begin{cases} b_0 = 2 \\ \text{pour tout } n \in \mathbb{N},\ b_{n+1} = \dfrac{2a_n + 3b_n}{5} \end{cases}$$

1. Calculer a_1, b_1, a_2 et b_2.

2. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $s_n = a_n + b_n$. Démontrer que la suite (s_n) est constante.

3. En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $b_n = 3 - a_n$.

Exercice 6. On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 0$, $u_1 = 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = 2u_{n+1} - u_n$.

1. a. Calculer u_2, u_3 et u_4.

b. Quelle conjecture peut-on faire ?

2. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $d_n = u_{n+1} - u_n$.

a. Montrer que (d_n) est constante.

b. En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n + 1$.

c. En déduire une démonstration de la conjecture faite en question **1.b.**.

Exercice 7. Étudier les variations des suites suivantes.

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = n^2 + 3$.
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = \frac{1}{n+2}$.
3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $w_n = \frac{n}{n+1}$.
4. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $t_n = 1 - \frac{1}{n+3}$.
5. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $s_n = \frac{2^n}{5^n}$.
6. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $z_n = \frac{2^n}{7^{n+1}}$.

Exercice 8. Étudier les variations des suites suivantes.

1. (u_n) est définie par $u_0 = -1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n(1 - 2u_n)$.
2. (v_n) est définie par $v_0 = 3$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = v_n - 2n$.
3. (w_n) est définie par $w_0 = 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $w_{n+1} = w_n + n - 5$.
4. (t_n) est définie par $t_0 = 4$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $t_{n+1} = t_n + (-1)^n$.

Exercice 9. On considère la suite (u_n) définie, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par $u_n = \frac{2^n}{n^2}$.

1. Calculer, à l'aide de la calculatrice, les 10 premiers termes de (u_n) et conjecturer que (u_n) est monotone à partir d'un rang que l'on déterminera.
2. Démontrer la conjecture de la question précédente.

Exercice 10. **Exercice 93 p. 161** du manuel

Exercice 11. **Exercice 95 p. 161** du manuel

Exercice 12. Étudier les variations de la suite (a_n) définie, pour tout $n \in \mathbb{N}$, par $a_n = \frac{3n-1}{4n+5}$.

Exercice 13. On considère, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la suite (t_n) définie par $t_n = \frac{2^n}{n+2}$.

1. Justifier que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $t_n > 0$.
2. Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\frac{t_{n+1}}{t_n} - 1 = \frac{n+1}{n+3}$.
3. En déduire le sens de variation de (t_n).