Corrigés des exercices de la fiche n°2 non traités en classe

Exercice 4. Notons ℓ et L les longueurs, en cm, des côtés du rectangle. Alors $\ell + L = \frac{24}{2} = 12$ et $\ell \times L = 25$. Ainsi, ℓ et L sont les solutions de l'équation $(E) : x^2 - 12x + 25 = 0$.

Le discriminant de (E) est $(-12)^2 - 4 \times 1 \times 25 = 44 > 0$ donc (E) admet deux solutions réelles :

$$x_1 = \frac{-(-12) - \sqrt{44}}{2 \times 1} = \frac{12 - 2\sqrt{11}}{2} = 6 - \sqrt{11} \text{ et } x_2 = \frac{-(-12) + \sqrt{44}}{2 \times 1} = \frac{12 + 2\sqrt{11}}{2} = 6 + \sqrt{11}$$

Ainsi, $\boxed{\ell = 6 - \sqrt{11} \text{ et } L = 6 + \sqrt{11}}$.

Exercice 5. On a $a + b = 2 - \sqrt{3} + 2 + \sqrt{3} = 4$ et $ab = (2 - \sqrt{3})(2 + \sqrt{3}) = 2^2 - \sqrt{3}^2 = 1$ donc a et b sont racines du trinôme $x^2 - 4x + 1$.

Exercice 6. Soit $f : x \mapsto -x^2 + 8x + 20$.

1. Pour tout réel x,

$$f(x) = -(x^2 - 8x - 20) = -\left[(x-4)^2 - 16 - 20\right] = -\left[(x-4)^2 - 36\right]$$

donc $\boxed{\text{la forme canonique de } f \text{ est } f : x \mapsto -\left[(x-4)^2 - 36\right]}$.

2. On en déduit que, pour tout réel x,

$$f(x) = -\left[(x-4)^2 - 4^2\right] = -\left[(x-4) - 6\right]\left[(x-4) + 6\right] = -(x-10)(x+2)$$

donc $\boxed{\text{la forme canonique de } f \text{ est } f : x \mapsto -(x-10)(x+2)}$.

3. a. Avec la forme développée, $f(0) = 20$.

b. Avec la forme développée,

$$f(x) = 20 \Leftrightarrow -x^2+8x+20 = 20 \Leftrightarrow -x^2+8x = 0 \Leftrightarrow x(-x+8) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } x = 8.$$

Ainsi, $\boxed{\text{l'ensemble des solutions de } f(x) = 20 \text{ est } \{0\,;8\}}$.

c. Avec la forme canonique,

$$f(x) = 36 \Leftrightarrow -\left[(x-4)^2 - 36\right] = 36 \Leftrightarrow -(x-4)^2+36 = 36 \Leftrightarrow -(x-4)^2 = 0 \Leftrightarrow x = 4.$$

Ainsi, $\boxed{\text{l'ensemble des solutions de } f(x) = 36 \text{ est } \{4\}}$.

d. Soit $x \in \mathbb{R}$. En utilisant la forme canonique, $f(x) = -(x-4)^2 + 36$ donc, comme $-(x-4)^2 \leqslant 0$, $f(x) \leqslant 36$.

Ainsi, $\boxed{\text{pour tout réel } x,\ f(x) \leqslant 36}$.

Exercice 8. Soit x et y deux deux nombres réels non nuls tels que $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{5}{2}$ et $xy=-\frac{2}{3}$.

Alors, $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{y+x}{xy}$ donc $x+y=(xy)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)=-\frac{2}{3}\times\frac{5}{2}=-\frac{5}{3}$. Ainsi, x et y sont deux réels tels que $x+y=-\frac{5}{3}$ et $xy=-\frac{2}{3}$ donc ces nombres sont les solutions de l'équation $(E) : X^2+\frac{5}{3}X-\frac{2}{3}=0$.

Le discriminant de (E) est $\Delta=(\frac{5}{3})^2-4\times 1\times(-\frac{2}{3})=\frac{49}{9}>0$ donc cette équation a deux solutions réelles :

$$x_1=\frac{-\frac{5}{3}-\sqrt{\frac{49}{9}}}{2}=-2 \text{ et } x_2=\frac{-\frac{5}{3}+\sqrt{\frac{49}{9}}}{2}=\frac{1}{3}$$

Ainsi, x et y ne peuvent valoir que -2 et $\frac{1}{3}$.

Réciproquement, si, par exemple, $x=-2$ et $y=\frac{1}{3}$, on vérifie que $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{5}{2}$ et $xy=-\frac{2}{3}$.

Ainsi, $\boxed{\text{les nombres } -2 \text{ et } \frac{1}{3} \text{ sont solutions du problème}}$.

Exercice 10. NOTA BENE : l'énoncé sous-entend que r et s sont non nuls.

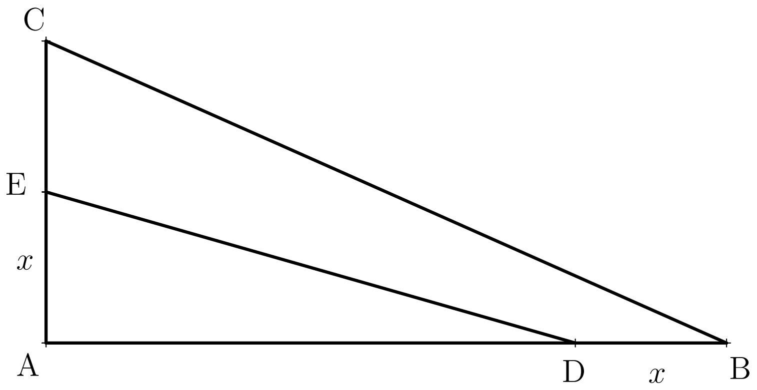
D'après le cours, $\boxed{r+s=-\frac{b}{a}}$ et $\boxed{rs=\frac{c}{a}}$.

Ensuite, $\frac{1}{r}+\frac{1}{s}=\frac{s+r}{sr}$ donc $\frac{1}{r}+\frac{1}{s}=\frac{-\frac{b}{a}}{\frac{c}{a}}=-\frac{b}{a}\times\frac{a}{c}$ i.e. $\boxed{\frac{1}{r}+\frac{1}{s}=-\frac{b}{c}}$.

Enfin, $r^2+s^2=(r+s)^2-2rs=(-\frac{b}{a})^2-2\frac{c}{a}=\frac{b^2}{a^2}-\frac{2c}{a}$ donc $\boxed{r^2+s^2=\frac{b^2-2ac}{a^2}}$.

Exercice 12. NOTA BENE : il fallait lire E $\in$ [AC] et non pas E $\in$ (AC).

Commençons par faire un schéma :



L'aire du triangle ABC rectangle en A est $\frac{4\times 9}{2}=18$ et l'aire du triangle ADE rectangle en A est $\frac{x(9-x)}{2}$. Ainsi, l'aire du triangle ADE est égale à la moitié de celle du triangle ABC si et seulement si $\frac{x(9-x)}{2}=9$. Or,

$$\frac{x(9-x)}{2}=9\Leftrightarrow x(9-x)=18\Leftrightarrow x^2-9x+18=0$$

Comme $3+6=9$ et $3\times 6=18$, les solutions de $x^2-9x+18=0$ sont 3 et 6. Cependant, comme E appartient à [AC], $x\leqslant 4$ donc on conclut que $x=3$.

Ainsi, l'aire du triangle ADE est égale à la moitié de celle du triangle ABC si et seulement si $x=3$.

Exercice 14. NOTA BENE : il y avait une erreur dans l'énoncé, il s'agissait de 180 écus et non pas 150.

Notons N le nombre de pièces de tissu achetées et P le prix, en nombre d'écus, d'une pièce de tissu. L'énoncé se traduit par $NP = 180$ et $(N+3)(P-3) = 180$. On en déduit que $NP - 3N + 3P - 9 = 180$ donc, comme $NP = 180$, $-3N + 3P - 9 = 0$ i.e. $N - P = -3$. Ainsi, N et $-P$ vérifient $N + (-P) = -3$ et $N \times (-P) = -NP = -180$ donc N et $-P$ sont solutions de l'équation $(E) : x^2 + 3x - 180 = 0$.

Le discriminant de (E) est $3^2 - 4 \times 1 \times (-180) = 729 > 0$ donc (E) possède deux solutions réelles :

$$x_1 = \frac{-3 - \sqrt{729}}{2} = -15 \text{ et } x_2 = \frac{-3 + \sqrt{729}}{2} = 12$$

On en déduit que $N = 12$ et $P = 15$. Ainsi, $\boxed{\text{j'ai acheté 12 pièces de tissu}}$.

Exercice 15. NOTA BENE : il y avait une erreur dans l'énoncé, R_s et R_p ayant été échangées. Il fallait lire $R_s = 135$ et $R_p = 30$.

On a $R_1 + R_2 = 135$ et $\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = \frac{1}{30}$ donc $\frac{R_2+R_1}{R_1R_2} = \frac{1}{30}$. Ainsi, $R_1R_2 = 135(R_1 + R_2) = 30 \times 135 = 4050$. Ainsi, R_1 et R_2 sont solutions de l'équation $(E) : x^2 - 135x + 4050 = 0$.

Le discriminant de (E) est $135^2 - 4 \times 1 \times 4050 = 2025 > 0$ donc (E) a deux solutions réelles :

$$x_1 = \frac{-(-135) - \sqrt{2025}}{2} = 45 \text{ et } x_2 = \frac{-(-135) + \sqrt{2025}}{2} = 90$$

On en déduit que $\boxed{\text{les deux résistantes } R_1 \text{ et } R_2 \text{ valent } 45\Omega \text{ et } 90\Omega}$.

Exercice 16.

1. $(E_1) : 2x^3 + x^2 - 5x + 2 = 0$

Considérons $f : x \mapsto 2x^3 + x^2 - 5x + 2$.

Comme $2 + 1 - 5 + 2 = 0$, 1 est racine évidente de f. Ainsi, $f(x)$ se factorise pas $x - 1$ i.e. il existe des réels a, b et c tels que, pour tout réel x, $f(x) = (x-1)(ax^2 + bx + c)$. Or, pour tout réel x,

$$(x-1)(ax^2 + bx + c) = ax^3 + bx^2 + cx - ax^2 - bx - c = ax^3 + (b-a)x^2 + (c-b)x - c$$

donc, par unicité de la forme développée,

$$a = 2 \qquad b - a = 1 \qquad c - b = -5 \qquad -c = 2$$

d'où l'on déduit que $a = 2$, $b = 3$ et $c = -2$. Ainsi, pour tout réel x, $f(x) = (x-1)(2x^2 + 3x - 2)$ donc

$$(E_1) \Leftrightarrow (x-1)(2x^2+3x-2) = 0 \Leftrightarrow x-1 = 0 \text{ ou } 2x^2+3x-2 = 0 \Leftrightarrow x = 1 \text{ ou } 2x^2+3x-2 = 0$$

Notons $(F) : 2x^2 + 3x - 2$. Le discriminant de (F) est $3^2 - 4 \times 2 \times (-2) = 25 > 0$ donc (F) possède deux solutions réelles :

$$x_1 = \frac{-3 - \sqrt{25}}{2 \times 2} = -2 \text{ et } x_2 = \frac{-3 + \sqrt{25}}{2 \times 2} = \frac{1}{2}$$

On conclut que $\boxed{\text{l'ensemble des solutions de } (E_1) \text{ est } \{1\,;-2\,;\tfrac{1}{2}\}}$.

2. $(E_2) : 4x^3 - 12x^2 + 9x - 2 = 0$
Considérons $f : x \mapsto 4x^3 - 12x^2 + 9x - 2$.
On remarque que $f(2) = 0$ donc $f(x)$ se factorise pas $x - 2$ i.e. il existe des réels a, b et c tels que, pour tout réel x, $f(x) = (x-2)(ax^2 + bx + c)$. Or, pour tout réel x,

$$(x-2)(ax^2+bx+c) = ax^3+bx^2+cx-2ax^2-2bx-2c = ax^3+(b-2a)x^2+(c-2b)x-2c$$

donc, par unicité de la forme développée,

$$a = 4 \qquad b - 2a = -12 \qquad c - 2b = 9 \qquad -2c = -2$$

d'où l'on déduit que $a = 4$, $b = -4$ et $c = 1$. Ainsi, pour tout réel x, $f(x) = (x-2)(4x^2 - 4x + 1) = (x-2)(2x-1)^2$ donc

$$(E_2) \Leftrightarrow (x-2)(2x-1)^2 = 0 \Leftrightarrow x - 2 = 0 \text{ ou } 2x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 2 \text{ ou } x = \frac{1}{2}$$

On conclut que $\boxed{\text{l'ensemble des solutions de } (E_2) \text{ est } \left\{2\,;\frac{1}{2}\right\}}$.

3. $(E_3) : -x^3 + 7x^2 - 7x - 15 = 0$
Considérons $f : x \mapsto -x^3 + 7x^2 - 7x - 15$.
On constate que $f(-1) = 0$ donc $f(x)$ se factorise pas $x - (-1) = x + 1$ i.e. il existe des réels a, b et c tels que, pour tout réel x, $f(x) = (x+1)(ax^2 + bx + c)$. Or, pour tout réel x,

$$(x-1)(ax^2+bx+c) = ax^3 + bx^2 + cx + ax^2 + bx + c = ax^3 + (b+a)x^2 + (c+b)x + c$$

donc, par unicité de la forme développée,

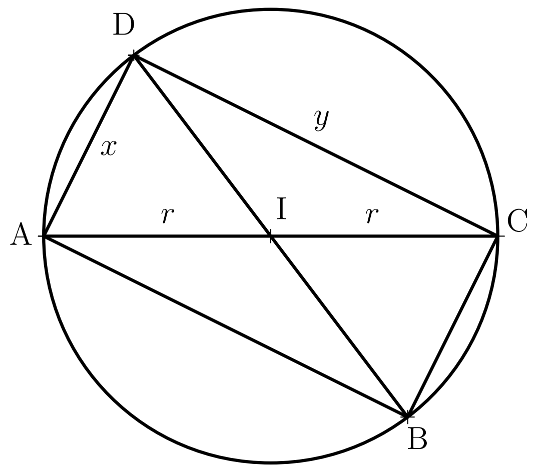
$$a = -1 \qquad b + a = 7 \qquad c + b = -7 \qquad c = -15$$

d'où l'on déduit que $a = -1$, $b = 8$ et $c = -15$. Ainsi, pour tout réel x, $f(x) = (x+1)(-x^2 + 8x - 15)$ donc

$$(E_1) \Leftrightarrow (x+1)(-x^2+8x-15) = 0 \Leftrightarrow x+1 = 0 \text{ ou } -x^2+8x-15 = 0 \Leftrightarrow x = -1 \text{ ou } x^2-8x+15 = 0$$

Notons $(F) : x^2 - 8x + 15$. Comme $3 + 5 = 8$ et $3 \times 5 = 15$, les solutions de (F) sont 3 et 5.
On conclut que $\boxed{\text{l'ensemble des solutions de } (E_3) \text{ est } \{-1\,;3\,;5\}}$.

Exercice 17. Commençons par faire une figure.



1. Notons $x = \mathrm{AD}$ et $y = \mathrm{AB}$.
Alors, par hypothèse, $x + y = p$. De plus, d'après le théorème de Pythagore, $x^2 + y^2 = (2r)^2 = 4r^2$. Remarquons, de plus, que $(x-y)^2 \geqslant 0$ donc $x^2-2xy+y^2 \geqslant 0$ i.e. $2xy \leqslant x^2+y^2$. Ainsi,
$p^2 = (x + y)^2 = x^2 + y^2 + 2xy \leqslant 2(x^2 + y^2) = 2 \times 4r^2$ donc $p \leqslant \sqrt{8r^2}$ i.e. $\boxed{p \leqslant 2\sqrt{2}r}$.

2. On a vu précédemment que $x+y = p$ et $p^2 = x^2+y^2+2xy = 4r^2+2xy$ donc $xy = \frac{p^2-4r^2}{2}$.
Ainsi, x et y sont solutions de l'équation $(E) : X^2 - pX + \frac{p^2-4r^2}{2} = 0$
Le discriminant de (E) est $\Delta = (-p)^2 - 4 \times 1 \times \frac{p^2-4r^2}{2} = p^2 - 2(p^2 - 4r^2) = 8r^2 - p^2$.
Or, d'après la question **1.**, $p^2 \leqslant 8r^2$ donc $\Delta \geqslant 0$.
Si $p^2 = 4r^2$ alors $\Delta = 0$ donc (E) possède une unique solution $x_0 = -\frac{-p}{2} = \frac{p}{2}$ donc $x = y = \frac{p}{2}$ et donc ABCD est un carré.
Si $p^2 < 4r^2$ alors $\Delta > 0$ donc (E) possède deux solutions réelles :

$$x_1 = \frac{-(-p) - \sqrt{8r^2 - p^2}}{2} = \frac{p - \sqrt{8r^2 - p^2}}{2} \text{ et } x_1 = \frac{-(-p) + \sqrt{8r^2 - p^2}}{2} = \frac{p + \sqrt{8r^2 - p^2}}{2}.$$

Ainsi, les côtés de ABCD mesurent $\frac{p-\sqrt{8r^2-p^2}}{2}$ et $\frac{p+\sqrt{8r^2-p^2}}{2}$.
Remarque. — Par inégalité triangulaire, $p = x+y \leqslant 2r$ donc $p^2 \leqslant 4r^2$ et ainsi $p^2 \geqslant 8r^2-p^2$ ce qui assure que x_1 est bien positif.

Exercice 18. Soit a et b deux réels et $x = a + b$ et $y = ab$. Alors, $x + y = a + b + ab$ et $xy = (a + b)ab = a^2b + ab^2$. Ainsi,

$$\begin{cases} a + b + ab = -\frac{5}{3} \\ a^2b + ab^2 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = -\frac{5}{3} \\ xy = 4 \end{cases}$$

Ce dernier système équivaut à dire que x et y sont solutions de l'équation $(E) : X^2 + \frac{5}{3}X + 4 = 0$.

Le discriminant de (E) est $\Delta = (\frac{5}{3})^2 - 4 \times 1 \times 4 = \frac{25}{9} - 16 = -\frac{119}{9} < 0$ donc (E) n'a pas de solution réelle.

Ainsi, il n'est pas de réels x et y solutions du second système et donc il n'existe pas de réels a et b solutions du premier système.