

Fiche d'exercices n°2. — Équations du second degré (suite)

Exercice 1. Soit $c \in \mathbb{R}$ et $f : x \mapsto -x^2 + 4x + c$. Déterminer c tel que -2 soit racine de f . Quelle est alors l'autre racine de f ?

Exercice 2. Factoriser, lorsque cela est possible, les fonctions polynômes du second degré suivantes.

$$f : x \mapsto 2x^2 + 5x - 7 \quad g : x \mapsto x^2 - 2x - 1 \quad h : x \mapsto x^2 - x + 2 \quad i : x \mapsto x^2 - 7x + 12$$

Exercice 3. Déterminer deux réels a et b tels que $a + b = -16$ et $ab = 63$.

Exercice 4. Un rectangle a un périmètre de 24 cm et une aire de 25 cm². Déterminer les longueurs de ses côtés.

Exercice 5. Soit $a = 2 - \sqrt{3}$ et $b = 2 + \sqrt{3}$. Calculer $a + b$ et ab et en déduire une fonction polynôme du second degré dont les racines sont a et b .

Exercice 6. Soit $f : x \mapsto -x^2 + 8x + 20$.

1. Déterminer la forme canonique de f .
2. Déterminer la forme factorisée de f .
3. En utilisant la forme qui est la plus adaptée, répondre aux questions suivantes.
 - a. Calculer $f(0)$.
 - b. Résoudre $f(x) = 20$.
 - c. Résoudre $f(x) = 36$.
 - d. Montrer que, pour tout réel x , $f(x) \leq 36$.

Exercice 7. Déterminer, sans calculer le discriminant, les racines des fonctions suivantes.

$$f : x \mapsto x^2 - 5x + 6 \quad g : x \mapsto x^2 + 3x + 2 \quad h : x \mapsto 2x^2 + 2x - 4 \quad i : x \mapsto -x^2 + 2x + 3$$

Exercice 8. Déterminer deux nombres réels non nuls tels que $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{5}{2}$ et $xy = -\frac{2}{3}$.

Exercice 9. Soit $m \in \mathbb{R}$ et $f : x \mapsto (m - 1)x^2 + 2mx + 1 - 3m$.

1. Déterminer l'ensemble D des valeurs de m pour lesquelles f est une fonction polynôme du second degré.
2. Montrer que, pour tout réel m , 1 est racine de f .
3. Soit $m \in D$. Déterminer les racines de f .

Exercice 10. Soit a, b et c des réels tels que $a \neq 0$ et $f : x \mapsto ax^2 + bx + c$. On suppose que f admet deux racines réelles non nulles r et s .

Exprimer, en fonction de a, b et c , les nombres $r + s, rs, \frac{1}{r} + \frac{1}{s}$ et $r^2 + s^2$.

Exercice 11. On considère la fonction $f : x \mapsto 2x^4 - 9x^3 + 14x^2 - 9x + 2$.

1. **a.** Le nombre 0 est-il racine de f ?
b. Soit $r \in \mathbb{R}$. Montrer que si r est une racine de f alors $\frac{1}{r}$ est également une racine de f .
2. **a.** Montrer que l'équation $f(x) = 0$ est équivalente à l'équation

$$(E) : 2 \left(x^2 + \frac{1}{x^2} \right) - 9 \left(x + \frac{1}{x} \right) + 14 = 0.$$

- b.** On pose $u = x + \frac{1}{x}$. Déduire de la question précédente que (E) est équivalente à

$$(E') : 2u^2 - 9u + 10 = 0.$$

- c.** Résoudre (E') et en déduire les solutions de (E) .

Exercice 12. On considère un triangle ABC rectangle en A tel que $AB = 9$ et $AC = 4$. On place deux points D et E tels que $D \in [AB]$, $E \in (AC)$ et $DB = AE = x$.

Déterminer la valeur de x pour que l'aire du triangle ADE soit égale à la moitié de celle du triangle ABC.

Exercice 13. On considère un rectangle ABCD tel que $AB = 4$ et $AD = 10$. Où doit-on placer un point M sur $[BC]$ pour que AMD soit rectangle en M ?

Exercice 14. J'ai acheté plusieurs pièces de tissu pour 180 écus. Si j'avais acheté pour la même somme trois pièces de tissu de plus, j'aurais eu chaque pièce de tissu pour trois écus de moins. Combien ai-je acheté de pièces de tissu ?

Exercice 15. On considère deux résistances électriques R_1 et R_2 . Lorsqu'elles sont montées en série, la résistance totale R_s du circuit est $R_s = R_1 + R_2$. Lorsqu'elles sont montées en parallèle, la résistance totale R_p du circuit vérifie $\frac{1}{R_p} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$.

On a mesuré que $R_s = 135 \Omega$ et $R_p = 30 \Omega$. Déterminer R_1 et R_2 .

Exercice 16. Résoudre les équations suivantes.

1. $(E_1) : 2x^3 + x^2 - 5x + 2 = 0$
2. $(E_2) : 4x^3 - 12x^2 + 9x - 2 = 0$
3. $(E_3) : -x^3 + 7x^2 - 7x - 15 = 0$

Exercice 17. Soit r et p deux réels strictement positifs. On considère un cercle \mathcal{C} de rayon r . On suppose que A, B, C et D sont quatre points de \mathcal{C} tels que ABCD soit un rectangle de périmètre $2p$.

1. Montrer que $p \leq 2\sqrt{2}r$.
2. Exprimer les côtés de ABCD en fonction de r et p .

Exercice 18. Déterminer deux nombres a et b tels que

$$\begin{cases} a + b + ab = -\frac{5}{3} \\ a^2b + ab^2 = 4 \end{cases}.$$