Correction des exercices de la fiche n°1 non traités en classe

Exercice 8

• $(E_2) : \frac{3x^2-8x+16}{x-4} = 2x$
L'équation (E_2) a un sens si et seulement si $x - 4 \neq 0$ i.e. $x \neq 4$.
Pour tout $x \neq 4$,

$$\begin{aligned}(E_2) &\Leftrightarrow 3x^2 - 8x + 16 = 2x(x-4) \Leftrightarrow 3x^2 - 8x + 16 - 2x(x-4) = 0 \\ &\Leftrightarrow 3x^2 - 8x + 16 - 2x^2 + 8x = 0 \Leftrightarrow x^2 + 16 = 0\end{aligned}$$

Or, pour tout réel x, $x^2 + 16 > 0$ donc $\boxed{\text{l'ensemble des solutions de } (E_2) \text{ est vide}}$.

• $(E_3) : x + \frac{1}{x} = 3$
L'équation (E_3) a un sens si et seulement si $x \neq 0$.
Pour tout $x \neq 0$,

$$(E_3) \Leftrightarrow \left(x + \frac{1}{x}\right) \times x = 3x \Leftrightarrow x^2 + 1 = 3x \Leftrightarrow x^2 - 3x + 1 = 0$$

Le discriminant de $x^2 - 3x + 1$ est $\Delta = (-3)^2 - 4 \times 1 \times 1 = 5 > 0$ donc l'équation (E_3) a deux solutions réelles :

$$x_1 = \frac{-(-3) - \sqrt{5}}{2 \times 1} = \frac{3 - \sqrt{5}}{2} \text{ et } x_2 = \frac{-(-3) + \sqrt{5}}{2 \times 1} = \frac{3 + \sqrt{5}}{2}$$

Ainsi, $\boxed{\text{l'ensemble des solutions de } (E_3) \text{ est } \left\{\frac{3-\sqrt{5}}{2} ; \frac{3+\sqrt{5}}{2}\right\}}$.

• $(E_4) : 4x^4 - 13x^2 + 3 = 0$
Posons $X = x^2$ de telle sorte que (E_4) se réécrit $(F) : 4X^2 - 13X + 3 = 0$.
Le discriminant de (F) est $\Delta = (-13)^2 - 4 \times 4 \times 3 = 121 > 0$ donc l'équation (F) possède deux solutions réelles :

$$X_1 = \frac{-(-13) - \sqrt{121}}{2 \times 4} = \frac{13 - 11}{8} = \frac{1}{4} \text{ et } X_2 = \frac{-(-13) + \sqrt{121}}{2 \times 4} = \frac{13 + 11}{8} = 3$$

On en déduit que

$$(E_4) \Leftrightarrow x^2 = \frac{1}{4} \text{ ou} = x^2 = 3 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2} \text{ ou } x = -\frac{1}{2} \text{ ou } x = \sqrt{3} \text{ ou } x = -\sqrt{3}$$

donc $\boxed{\text{l'ensemble des solutions de } (E_4) \text{ est } \{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \sqrt{3}, -\sqrt{3}\}}$.

• (E_5) : $-2x+9\sqrt{x}-4=0$

L'équation (E_5) a un sens si et seulement si $x \geqslant 0$. Posons, pour tout $x \geqslant 0$, $X=\sqrt{x}$ de telle sorte que (E_5) se réécrit (F) : $-2X^2+9X-4=0$.

Le discriminant de (F) est $\Delta = 9^2-4\times(-2)\times(-4)=49>0$ donc (F) possède deux solutions réelles :

$$X_1=\frac{-9-\sqrt{49}}{2\times(-2)}=4 \text{ et } X_2=\frac{-9+\sqrt{49}}{2\times(-2)}=\frac{1}{2}.$$

Ainsi,

$$(E_5) \Leftrightarrow \sqrt{x}=4 \text{ ou } \sqrt{x}=\frac{1}{2} \Leftrightarrow x=16 \text{ ou } x=\frac{1}{4}$$

donc $\boxed{\text{l'ensemble des solutions de } (E_5) \text{ est } \{16\,;\frac{1}{4}\}}$.

• (E_7) : $\sqrt{x+4}=7-2x$

L'équation (E_7) a un sens si et seulement si $x+4 \geqslant 0$ i.e. $x \geqslant -4$. Pour tout $x \geqslant -4$, si x est solution de (E_7) alors $x+4=(7-2x)^2$ donc $x+4=49-28x+4x^2$ i.e. $4x^2-28x+49-(x+4)=0$ soit encore $4x^2-29x+45=0$.

Le discriminant de $4x^2-29x+45$ est $\Delta=(-29)^2-4\times4\times45=121>0$ donc $4x^2-29x+45=0$ possède deux solutions réelles :

$$x_1=\frac{-(-29)-\sqrt{121}}{2\times4}=\frac{9}{4} \text{ et } x_2=\frac{-(-29)+\sqrt{121}}{2\times4}=5$$

Réciproquement, on vérifie que $\frac{9}{4}$ est bien solution de (E_7) car $\sqrt{\frac{9}{4}+4}=\frac{5}{2}$ et $7-2\times\frac{9}{4}=\frac{5}{2}$. En revanche, 5 n'est pas solution de (E_7) car $\sqrt{5+4}=3$ et $7-2\times5=-3$.

On conclut que $\boxed{\text{l'ensemble des solutions de } (E_7) \text{ est } \{\frac{9}{4}\}}$.

• (E_8) : $(x^2-5)^2+22(x^2-5)+121=0$

Posons $X=x^2-5$. Alors (E_8) se réécrit (F) : $X^2+22X+121=0$. Or, $X^2+22X+121=(X+11)^2$ donc (F) équivaut à $X=-11$. Ainsi,

$$(E_8) \Leftrightarrow x^2-5=-11 \Leftrightarrow x^2=-6$$

Comme $-6<0$, $\boxed{\text{l'ensemble des solutions de } (E_8) \text{ est } \varnothing}$.