⧫ Rappels sur les équations

On rappelle ici les notions essentielles concernant les équations.

Notion d'équation. — Une équation est une égalité dans laquelle figure une (ou plusieurs) quantité(s) inconnue(s) traditionnellement notées x (y, z, t, X,...).

Dans la suite, on ne considère que des équations ayant une seule inconnue.

Solution d'une équation. – On dit qu'un nombre réel est solution d'une équation si, lorsqu'on remplace l'inconnue par ce nombre dans l'équation, on obtient une égalité vraie.

Par exemple, -1 est solution de $x^2 + 3x = -2$ car l'égalité $(-1)^2 + 3 \times (-1) = -2$ est vraie. En revanche, 1 n'est pas solution de cette équation car l'égalité $1^2 + 3 \times 1 = -2$ est fausse puisque $1^2 + 3 \times 1 = 4$.

Résoudre une équation dans $\mathbb{R}$, c'est déterminer l'ensemble de toutes ses solutions.

Équations équivalentes. — On dit que deux équations sont équivalentes si elles ont le même ensemble de solutions. Lorsque deux équations (E) et (F) sont équivalentes, on note :

$$(E) \Leftrightarrow (F)$$

Étant donné une équation (E), on obtient une équation équivalente à (E) si :

1. on ajoute ou on soustrait un même nombre réel aux deux membres de l'équation ;

2. on multiplie ou on divise les deux membres de l'équation par une même nombre non nul.

Pour résoudre une équation, on utilise les deux propriétés précédentes pour « isoler » progressivement l'inconnue tout en ne considérant que des équations équivalentes.

Exemple 1. Considérons l'équation $(E_1) : \dfrac{x+3}{5} = 2 - x$ d'inconnue x. On a alors :

$$\begin{aligned}
(E) &\Leftrightarrow \left(\frac{x+3}{5}\right) \times 5 = (2-x) \times 5 && \text{(on multiplie les deux membres par } 5 \neq 0) \\
&\Leftrightarrow x + 3 = 10 - 5x \\
&\Leftrightarrow x + 3 + 5x = 10 - 5x + 5x && \text{(on ajoute } 5x \text{ aux deux membres)} \\
&\Leftrightarrow 6x + 3 = 10 \\
&\Leftrightarrow 6x + 3 - 3 = 10 - 3 && \text{(on soustrait 3 aux deux membres)} \\
&\Leftrightarrow 6x = 7 \\
&\Leftrightarrow \frac{6x}{6} = \frac{7}{6} && \text{(on divise les deux membres par } 6 \neq 0) \\
&\Leftrightarrow x = \frac{7}{6}
\end{aligned}$$

On conclut que l'ensemble des solutions dans $\mathbb{R}$ de (E) est $\left\{\dfrac{7}{6}\right\}$.

Cas particulier important des équations affines. — Si a et b sont deux réels tels que $a \neq 0$ alors

$$ax + b = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{b}{a}.$$

Exemple 2. L'ensemble des solutions dans $\mathbb{R}$ de l'équation $(E_2) : 6X - 3 = 0$ d'inconnue X est $\left\{\dfrac{1}{2}\right\}$ car ici $a = 6$ et $b = -3$ donc $-\dfrac{b}{a} = -\dfrac{-3}{6} = \dfrac{1}{2}$.

Règle du produit nul. — Un produit de deux nombres réels est nul si et seulement si l'un au moins des deux facteurs du produit est nul.

En conséquence, si $A(x)$ te $B(x)$ sont deux quantités dépendant d'une inconnue x alors

$$A(x)B(x) = 0 \Leftrightarrow A(x) = 0 \text{ ou } B(x) = 0.$$

Remarque 3. Cette règle reste vraie pour une produit de 3, 4, 5,... (ou autant que vous voudrez de) facteurs.

Méthode 4. Une manière de se ramener à un produit nul est d'essayer de factoriser soit en utilisant les identités remarquables soit en reconnaissant un facteur commun.

Exemple 5.

1. On considère l'équation $(E_3) : (3t + 5)^2 = 4$ d'inconnue t. Alors,

$$\begin{aligned}
(F) &\Leftrightarrow (3t+5)^2 - 4 = 4 - 4 && \text{(On soustrait 4 aux deux membres)}\\
&\Leftrightarrow (\underbrace{3t+5}_{a})^2 - \underbrace{2}_{b}{}^2 = 0 && \text{(On reconnait une identité remarquable)}\\
&\Leftrightarrow \left[(\underbrace{3t+5}_{a}) - \underbrace{2}_{b}\right]\left[(\underbrace{3t+5}_{a}) + \underbrace{2}_{b}\right] = 0 && \text{(On factorise } a^2 - b^2 \text{ en } (a-b)(a+b))\\
&\Leftrightarrow (3t+3)(3t+7) = 0 &&\\
&\Leftrightarrow 3t+3 = 0 \text{ ou } 3t+7 = 0 && \text{(On utilise la règle du produit nul)}\\
&\Leftrightarrow t = -1 \text{ ou } t = -\frac{7}{2} && \text{(Ce sont deux équations affines)}
\end{aligned}$$

Ainsi, l'ensemble des solutions dans $\mathbb{R}$ de (E_3) est $\left\{-1, -\frac{7}{2}\right\}$.

2. On considère l'équation $(E_4) : 3x^2 = 5x$ d'inconnue x. Alors,

$$\begin{aligned}
(E_4) &\Leftrightarrow 3x^2 - 5x = 0 && \text{(On a soustrait } 5x \text{ aux deux membres)}\\
&\Leftrightarrow 3x \times x - 5 \times x = 0 && \text{(On reconnait le facteur commun } x)\\
&\Leftrightarrow x(3x - 5) = 0 && \text{(On factorise pour obtenir un produit nul)}\\
&\Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } 3x - 5 = 0 && \text{(On utilise la règle du produit nul)}\\
&\Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } x = \frac{5}{3} && \text{(On reconnait une équation affine)}
\end{aligned}$$

Finalement, l'ensemble des solutions dans $\mathbb{R}$ de (E_4) est $\left\{0, \frac{5}{3}\right\}$.

Exercice 6. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes d'inconnue x :

1. $(E_5) : (3x + 1)^2 - (x + 3)^2 = 0$;
2. $(E_6) : x(2x + 1) - 2x - 1 = 0$;
3. $(E_7) : 9x^2 + (x + 1)^2 = 0$;
4. $(E_8) : x^2 - 1 + (x + 1)(7 - 2x) = 0$.