Rappels de probabilités sur un ensemble fini

I. — Expériences aléatoires et évènements

1) Expériences aléatoires

Définition 1. — Une expérience aléatoire est une expérience qui possède les 3 propriétés suivantes :
- l'ensemble des résultats possibles de l'expérience est connu *a priori* ;
- on peut répéter l'expérience dans les mêmes conditions ;
- le résultat d'une réalisation de l'expérience est le fruit du hasard.

Définition 2. — L'ensemble des résultats (ou issues) possibles d'une expérience aléatoire est appelé l'univers associé à cette expérience. On le note, en général, Ω.

2) Evènements

Définition 3. — On considère une expérience aléatoire et Ω son univers. On définit alors :
- un **évènement** lié à cette expérience comme étant une partie quelconque de Ω.
- un **évènement élémentaire** lié à cette expérience comme étant une partie de Ω ne contenant qu'un seul élément.

Vocabulaire. — L'évènement $\varnothing$ est appelé l'évènement impossible et Ω l'évènement certain. Dire qu'une issue de l'expérience réalise un évènement signifie que cette issue appartient à l'évènement.

II. — Loi de probabilité sur un ensemble fini

1) Définition

Définition 4. — On considère une expérience aléatoire. On suppose que son univers Ω est constitué de n éléments $x_1, x_2, ..., x_n$ c'est-à-dire $\Omega = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$. Définir une loi de probabilité (ou simplement une probabilité) P sur Ω, c'est associer à chaque valeur $x_1, x_2, ..., x_n$ un réel $p_1, p_2, ..., p_n$ de telle façon que :
- pour tout entier i entre 1 et n, $0 \leq p_i \leq 1$;
- $p_1 + p_2 + ... + p_n = 1$.

Autrement dit, c'est définir une fonction $P : \Omega \to [0\,;1]$ telle que, pour tout entier i entre 1 et n, $P(x_i) = p_i$.

Vocabulaire. — Lorsqu'on a défini une probabilité P sur l'univers Ω d'une expérience aléatoire, on dit qu'on a modélisé l'expérience par la loi de probabilité P sur Ω.

Définition 5. — On considère une expérience aléatoire modélisée par une probabilité P sur son univers Ω. Si A est un évènement associé à cette expérience alors on définit la probabilité de A, notée $P(\mathrm{A})$, comme la somme des probabilités des évènements élémentaires inclus dans A. Autrement dit, $P(\mathrm{A})$ est la somme des probabilités des issues qui réalisent A.

Proposition 6. — *On considère une expérience aléatoire modélisé par une probabilité P sur son univers Ω. Alors,*
1. $P(\varnothing) = 0$ *;*
2. $P(\Omega) = 1$ *;*
3. *si* A *et* B *sont deux évènements tels que* $\mathrm{A} \subset \mathrm{B}$ *alors* $p(\mathrm{A}) \leqslant P(\mathrm{B})$ *;*
4. *si* A *est un évènement alors* $0 \leqslant P(\mathrm{A}) \leqslant 1$.

2) Un cas particulier important : la loi équirépartie

Définition 7. — On considère une expérience aléatoire et Ω son univers. Si tous les évènements élémentaires ont la même probabilité (on dit qu'ils sont équiprobables), on dit que la loi de probabilité associée est la loi équirépartie sur Ω. Cette loi est également appelé l'équiprobabilité sur Ω.

De manière générale, on modélise par la loi équirépartie à chaque fois qu'on a à faire à des objets « équilibrés » (pièce, dé) ou à des tirages « au hasard » (d'une carte dans un jeu, d'une boule dans une urne, ...)

Proposition 8. — *On considère une expérience aléatoire et $\Omega = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$ son univers. Si P est la loi équirépartie sur Ω alors :*

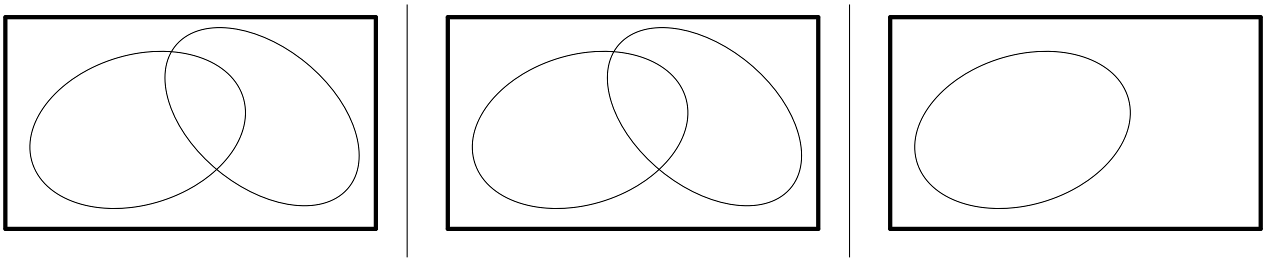
1. *pour tout entier i compris entre 1 et n, $P(x_i) = \dfrac{1}{n}$;*

2. *si A est un évènement contenant exactement m évènements élémentaires alors $P(\mathrm{A}) = \dfrac{m}{n}$.*

III. — Union, intersection et complémentaire

Définition 9. — On considère une expérience aléatoire et Ω son univers. Soit A et B deux évènements liés à cette expérience. On définit alors les évènements :

1. « A ou B » qui est réalisé si (au moins) l'un des deux évènements A ou B est réalisé. D'un point de vue ensembliste, il correspond à $\mathrm{A} \cup \mathrm{B}$ (union de A et B).
2. « A et B » qui est réalisé si les deux évènements A et B sont réalisés (simultanément). D'un point de vue ensembliste, il correspond à $\mathrm{A} \cap \mathrm{B}$ (intersection de A et B).
3. « contraire de A » qui est réalisé si A ne l'est pas. D'un point de vue ensembliste, il correspond au complémentaire de A dans Ω, noté $\overline{\mathrm{A}}$, c'est-à-dire à l'ensemble des éléments de Ω qui n'appartiennent pas à A.



Proposition 10. — *On considère une expérience aléatoire modélisée par une probabilité P sur son univers Ω. Soit A et B deux évènements liés à cette expérience. Alors,*

1. $P(\mathrm{A} \cup \mathrm{B}) = P(\mathrm{A}) + P(\mathrm{B}) - P(\mathrm{A} \cap \mathrm{B})$.

2. $P(\overline{\mathrm{A}}) = 1 - P(\mathrm{A})$.

Remarque 11. La première égalité de la propriété précédente peut aussi se réécrire

$$P(\mathrm{A} \cup \mathrm{B}) + P(\mathrm{A} \cap \mathrm{B}) = P(\mathrm{A}) + P(\mathrm{B})$$

ou encore

$$P(\mathrm{A} \cap \mathrm{B}) = P(\mathrm{A}) + P(\mathrm{B}) - P(\mathrm{A} \cup \mathrm{B}).$$