Corrigé du devoir surveillé n°4

Exercice 1.

1. Le sommet de $\mathcal{P}$ est $S(1\,;2)$. Ainsi, tous les points de $\mathcal{P}$ ont une ordonnée supérieure ou égale à 2 si le coefficient dominant a de f est positif et inférieure ou égale à 2 sinon. Or, le point $A(0\,;4)$ appartient à $\mathcal{P}$ et $x_A = 4 > 2$ donc $a > 0$. Ainsi, la parabole est tournée vers le haut donc, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) \geqslant 2$. En particulier, $\boxed{\text{pour tout réel } x,\ f(x) > 0}$.

2. Comme $a > 0$ et que $S(1\,;2)$, la fonction f est strictement décroissante sur $]-\infty\,;1]$ et strictement croissante sur $[1\,;+\infty[$.

3. Comme S a pour coordonnées $(1\,;2)$, pour tout réel x, $f(x) = a(x-1)^2+2$. De plus, $f(0) = 4$ donc $a(0-1)^2+2 = 4$ i.e. $a+2 = 4$ donc $a = 2$. Ainsi, pour tout réel x, $f(x) = 2(x-1)^2+2$ et donc $f(x) = 2(x^2-2x+1)+2$. Ainsi, $\boxed{\text{pour tout } x \in \mathbb{R},\ f(x) = 2x^2-4x+4}$.

Exercice 2.

1. Soit $x \in [0\,;5]$. La surface grisée est composée de deux triangles rectangles d'aires respectivement $\frac{x^2}{2}$ et $\frac{(x-10)(x-5)}{2}$. Ainsi, la surface grisée a une aire, en cm^2, égale à

$$f(x) = \frac{x^2}{2} + \frac{(x-10)(x-5)}{2} = \frac{x^2+x^2-5x-10x+50}{2} = \frac{2x^2-15x+50}{2}$$

i.e. $\boxed{f(x) = x^2 - \frac{15}{2}x + 25}$.

2. La fonction $f : x \mapsto x^2 - \frac{15}{2}x + 25$ est une fonction polybôme du second degré donc le coefficient dominant est $a = 1$. Par propriété, on sait que f atteint son maximum (sur $\mathbb{R}$) en $\dfrac{-(-\frac{15}{2})}{2\times 1} = \frac{15}{4}$. Comme $\frac{15}{4} \in [0\,;5]$, on conclut que l'aire grisée est maximale si $\boxed{x = \frac{15}{4}}$.

Exercice 3.

1.

```
A=float(input("Saisir un réel non nul :"))
B=float(input("Saisir un réel :"))
B=float(input("Saisir un réel :"))
D=B**2-4*A*C
if (D>0):
   print("oui")
else:
   print("non")
```

2. On peut remplacer la ligne

```
if (D>0):
```

par

```
if (D<=0 and a>0):
```

Exercice 4.

1. Pour tout $x \in I$, $f'(x) = -3$.
2. Pour tout $x \in I$, $f'(x) = 12x^3 - 12x^2 + 2x - 2$.
3. Pour tout $x \in I$,

$$f'(x) = 1 \times \sqrt{x} + (x+1) \times \frac{1}{2\sqrt{x}} = \sqrt{x} + \frac{x+1}{2\sqrt{x}} = \frac{2\sqrt{x}^2 + x + 1}{2\sqrt{x}} = \frac{3x+1}{2\sqrt{x}}.$$

4. Pour tout $x \in I$, $f'(x) = -\dfrac{-4}{(1-4x)^2} = \dfrac{4}{(1-4x)^2}$.
5. Pour tout $x \in I$, $f'(x) = \dfrac{2}{2\sqrt{2x+4}} = \dfrac{1}{\sqrt{2x+4}}$.

Exercice 5.

1. La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme quotient de deux fonctions dérivables (et la fonction $x \mapsto x^2 + 8$ ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$). De plus, pour tout réel x,

$$f'(x) = \frac{1 \times (x^2+8) - (x+1) \times (2x)}{(x^2+8)^2} = \frac{x^2 + 8 - 2x^2 - 2x}{(x^2+8)^2}$$

et donc $\boxed{f'(x) = \dfrac{-x^2 - 2x + 8}{(x^2+8)^2}}$.

2. Pour tout réel x, $(x^2+8)^2 > 0$ donc le signe de $f'(x)$ est le signe de $-x^2 - 2x + 8$. Le discriminant de ce trinôme est $(-2)^2 - 4 \times (-1) \times 8 = 36 > 0$ donc ce dernier possède deux racines réelles : $x_1 = \frac{-(-2)-\sqrt{36}}{2\times(-1)} = \frac{2-6}{-2} = 2$ et $x_1 = \frac{-(-2)+\sqrt{36}}{2\times(-1)} = \frac{2+6}{-2} = -4$. Comme $a = -1 < 0$, on en déduit que $f'(x) \leqslant 0$ si $x \in \left]-\infty\,;-4\right] \cup \left[2\,;+\infty\right[$, $f'(x) \geqslant 0$ si $x \in [-4\,;2]$.

   Ainsi, $\boxed{f \text{ est décroissante sur } \left]-\infty\,;-4\right]\text{, croissante sur } [-4\,;2] \text{ et décroissante sur } \left[2\,;+\infty\right[}$.

3. On déduit de la question précédente que f admet un minimum local en -4 qui vaut $f(-4) = -\frac{1}{8}$ et un maximum local en 2 qui vaut $f(2) = \frac{1}{4}$.
4. On a $f'(0) = \frac{8}{8^2} = \frac{1}{8}$ et $f(0) = \frac{1}{8}$ donc $T : y = f'(0)(x-0) + f(0) = \dfrac{1}{8}(x-0) + \dfrac{1}{8}$ donc $\boxed{T : y = \dfrac{x+1}{8}}$.
5. Posons, pour tout réel x, $d(x) = f(x) - \frac{x+1}{8}$. Alors, pour tout réel x,

$$f(x) = \frac{x+1}{x^2+8} - \frac{x+1}{8} = \frac{8(x+1) - (x+1)(x^2+8)}{8(x^2+8)} = \frac{(x+1)[8-(x^2+8)]}{8(x^2+8)} = -\frac{x^2(x+1)}{8(x^2+8)}.$$

   Comme $x^2 \geqslant 0$ et $8(x^2+8) > 0$, le signe de $d(x)$ est le signe de $-(x+1)$. Ainsi, $d(x) \geqslant 0$ si $x \leqslant -1$ et $d(x) \leqslant 0$ si $x \leqslant -1$.

   On en déduit que $\underline{\mathcal{C}_f \text{ est au-dessus (au sens large) de } T \text{ sur } \left]-\infty\,;-1\right] \text{ et en dessous (au sens large) de } T \text{ sur } \left[-1\,;+\infty\right[}$.