NOM : .... **Prénom :** ....

Première générale – spécialité mathématiques – Groupe M3 vendredi 06 mars 2020

Devoir surveillé n°4

Durée : 1 heure

L'utilisation d'une calculatrice est autorisée.

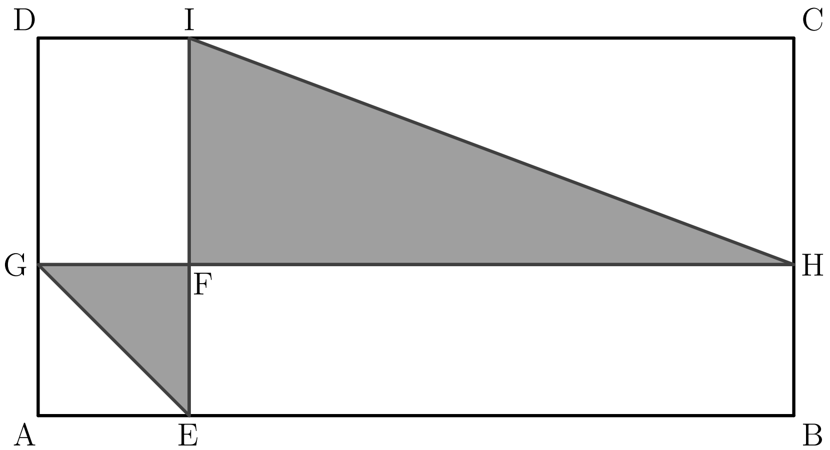
Exercice 1. (4 points) — On considère une fonction polynôme du second degré f. On note $\mathcal{P}$ la courbe de f dans un repère orthonormé du plan. On sait que

- le sommet de la parabole $\mathcal{P}$ est $\mathrm{S}(1\,;2)$;
- la courbe $\mathcal{P}$ coupe l'axe des ordonnées au point d'ordonnée 4.

Répondre aux questions suivantes en justifiant ses réponses.

1. Déterminer, sans calcul, le signe de $f(x)$ pour tout réel x.
2. Donner les variations de f sur $\mathbb{R}$.
3. Déterminer l'expression développée de $f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Exercice 2. (4 points) — Sur la figure ci-dessous, ABCD est un rectangle de cotés 10 cm et 5 cm, AEFG est un carré de côté x cm où $x \in [0\,;5]$ et FHCI est un rectangle.



1. Exprimer, pour tout $x \in [0\,;5]$, l'aire, en cm^2, de la surface grisée en fonction de x.
2. Déterminer x pour que l'aire de la surface grisée soit minimale.

Exercice 3. (2 points) — On considère le programme Python suivant.

```
A=float(input("Saisir un réel non nul :"))
B=float(input("Saisir un réel :"))
B=float(input("Saisir un réel :"))
D=.........
if (......):
   print("oui")
else:
   print("non")
```

1. Compléter les pointillés (directement sur l'énoncé) de sorte que si on exécute ce programme en saisissant trois réels a, b et c (avec $a \neq 0$) alors le programme affiche `oui` si la fonction trinôme $x \mapsto ax^2 + bx + c$ change de signe et `non` si elle reste toujours du même signe (au sens large).

2. Comment modifier ce programme pour qu'il affiche `oui` si la fonction f est toujours positive ou nulle et `non` sinon ?

Exercice 4. (5 points) — Dans chacun des cas suivants, calculer $f'(x)$ pour tout $x \in I$. On ne demande pas de justifier la dérivabilité de f sur I.

1. $f(x) = -3x + 2$, $I = \mathbb{R}$.

2. $f(x) = 3x^4 - 4x^3 + x^2 - 2x$, $I = R$.

3. $f(x) = (x + 1)\sqrt{x}$, $I = \left]0\,; +\infty\right[$.

4. $f(x) = \dfrac{1}{1 - 4x}$, $I = \left]-\infty\,; \frac{1}{4}\right[$.

5. $f(x) = \sqrt{2x + 4}$, $I = \left]-2\,; +\infty\right[$.

Exercice 5. (5 points) — On considère la fonction $f : x \mapsto \dfrac{x + 1}{x^2 + 8}$ définie sur $\mathbb{R}$ et on note $\mathcal{C}_f$ sa courbe dans un repère orthonormé $\left(\mathrm{O}\,; \vec{i}, \vec{j}\right)$.

1. Justifier que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et montrer que, pour tout réel x,

$$f'(x) = \frac{-x^2 - 2x + 8}{(x^2 + 8)^2}.$$

2. Étudier les variations de f sur $\mathbb{R}$.

3. Quels sont les extremums (locaux) de f sur $\mathbb{R}$?

4. Déterminer une équation de la tangente T à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 0.

5. Étudier les positions relatives de T et de $\mathcal{C}_f$.