Corrigé du devoir surveillé n°2

Exercice 1.

a) La suite (u_n) est définie à partir du rang 0. De plus, $u_0 = 0^2 - 3 = -3$, $u_1 = 1^2 - 3 = -2$ et $u_2 = 2^2 - 3 = 1$.

b) La suite (u_n) est définie à partir du rang 5 car il faut que $n - 5 \geqslant 0$. De plus, $u_5 = \sqrt{5-5} = \sqrt{0} = 0$, $u_6 = \sqrt{6-5} = \sqrt{1} = 1$ et $u_7 = \sqrt{7-5} = \sqrt{2}$.

c) La suite (u_n) est définie à partir du rang 1 car il faut que $n \neq 0$. De plus, $u_1 = \frac{3}{1} = 3$, $u_2 = \frac{3}{2}$ et $u_3 = \frac{3}{3} = 1$.

Exercice 2.

a) $u_0 = 1$, $u_1 = u_0^2 - 3 = 1 - 3 = -2$ et $u_2 = u_1^2 - 3 = (-2)^2 - 3 = 1$.

b) $u_3 = 1$, $u_4 = u_{3+1} = 3 - u_3 = 3 - 1 = 2$ et $u_5 = u_{4+1} = 4 - u_4 = 4 - 2 = 2$.

c) $u_0 = 2$, $u_1 = u_{0+1} = \frac{(0+1)u_0}{0+2} = \frac{2}{2} = 1$ et $u_2 = u_{1+1} = \frac{(1+1)u_1}{1+2} = \frac{2}{3}$.

Exercice 3.

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors, $u_{n+1} = (n+1)^2 + (n+1) - 1 = n^2 + 2n + 1 + n + 1 - 1 = n^2 + 3n + 1$ donc $u_{n+1} - u_n = n^2 + 3n + 1 - (n^2 + n - 1) = n^2 + 3n + 1 - n^2 - n + 1 = 2n + 2 \geqslant 0$ car $n \geqslant 0$. Ainsi, $\boxed{(u_n) \text{ est croissante}}$.
2. Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors, $n + 1 + 3 \geqslant n + 3 > 0$ donc $\frac{1}{n+1+3} \leqslant \frac{1}{n+3}$ i.e. $v_{n+1} \leqslant v_n$. Ainsi, $\boxed{(v_n) \text{ est décroissante}}$.
3. Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors, $w_{n+1} = 3^{n+1} = 3 \times 3^n$ donc $w_{n+1} - w_n = 3 \times 3^n - 3^n = 2 \times 3^n \geqslant 0$ car $2 \geqslant 0$ et $3 \geqslant 0$. Ainsi, $\boxed{(w_n) \text{ est croissante}}$.
4. Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors, $t_{n+1} - t_n = t_n - 2n - t_n = -2n \leqslant 0$ car $n \geqslant 0$. Ainsi, $\boxed{(t_n) \text{ est décroissante}}$.

Exercice 4.

1. À l'aide de la calculatrice, on conjecture que (u_n) est croissante à partir du rang 4.
2. Soit $n \in \mathbb{N}$. Comme $2 > 0$ et $3 > 0$, $2^n > 0$ et $3^n > 0$. De plus, $n^2 + 2 > 0$ donc $u_n > 0$.
3. Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors,

$$u_{n+1} = \frac{3^{n+1}}{((n+1)^2+2)2^{n+1}} = \frac{3 \times 3^n}{((n+1)^2+2) \times 2 \times 2^n}$$

donc

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\frac{3 \times 3^n}{((n+1)^2+2) \times 2 \times 2^n}}{\frac{3^n}{(n^2+2)2^n}} = \frac{3 \times 3^n}{((n+1)^2+2) \times 2 \times 2^n} \times \frac{(n^2+2)2^n}{3^n} = \frac{3(n^2+2)}{2((n+1)^2+2)}.$$

Dès lors,

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} - 1 = \frac{3(n^2+2)}{2((n+1)^2+2)} - 1 = \frac{3(n^2+2) - 2((n+1)^2+2)}{2((n+1)^2+2)}.$$

Or,

$$3(n^2+2) - 2((n+1)^2+2) = 3n^2+6-2(n^2+2n+3) = 3n^2+6-2n^2-4n-6 = n^2-4n$$

donc

$$\boxed{\frac{u_{n+1}}{u_n} - 1 = \frac{n^2-4n}{2((n+1)^2+2)} = \frac{n(n-4)}{2((n+1)^2+2)}}.$$

4. Pour tout $n \geqslant 4$, $n \geqslant 0$, $n-4 \geqslant 0$ et $2((n+1)^2+2) \geqslant 0$ donc $\frac{u_{n+1}}{u_n} - 1 \geqslant 0$ et ainsi $\frac{u_{n+1}}{u_n} \geqslant 1$.

On conclut que $\boxed{(u_n) \text{ est croissante à partir du rang } 4}$.

Exercice 5. Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors, $u_{n+1} = 1 - \frac{1}{u_n}$ donc

$$u_{n+2} = 1 - \frac{1}{u_{n+1}} = 1 - \frac{1}{1-\frac{1}{u_n}} = 1 - \frac{1}{\frac{u_n-1}{u_n}} = 1 - \frac{u_n}{u_n-1} = \frac{u_n-1-u_n}{u_n-1} = -\frac{1}{u_n-1}.$$

Dès lors,

$$u_{n+3} = 1 - \frac{1}{u_{n+2}} = 1 - \frac{1}{-\frac{1}{u_n-1}} = 1 + \frac{1}{\frac{1}{u_n-1}} = 1 + (u_n-1) = u_n.$$

Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{3(n+1)} = u_{3n+3} = u_{3n}$ donc $\boxed{\text{la suite } (u_{3n}) \text{ est constante}}$.