Devoir surveillé n°2

Durée : 1 heure

L'utilisation d'une calculatrice est autorisée.

Exercice 1. (3 points) — Dans chacun des cas suivants, déterminer à partir de quel rang (u_n) est définie et calculer ses 3 premiers termes.

a) $u_n = n^2 - 3$ b) $u_n = \sqrt{n-5}$ c) $u_n = \dfrac{3}{n}$.

Exercice 2. (3 points) — Dans chacun des cas suivants, calculer les 3 premiers termes de la suite (u_n).

a) $\begin{cases} u_0 = 1 \\ \text{pour tout } n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n^2 - 3 \end{cases}$ b) $\begin{cases} u_3 = 1 \\ \text{pour tout } n \geqslant 3, u_{n+1} = n - u_n \end{cases}$

c) $\begin{cases} u_0 = 2 \\ \text{pour tout } n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \dfrac{(n+1)u_n}{n+2} \end{cases}$

Exercice 3. (8 points) — Étudier les variations des suites suivantes.

1. (u_n) est définie par : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = n^2 + n - 1$.

2. (v_n) est définie par : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = \frac{1}{n+3}$.

3. (w_n) est définie par : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $w_n = 3^n$.

4. (t_n) est définie par : $t_0 = 0$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $t_{n+1} = t_n - 2n$.

Exercice 4. (6 points) — On considère la suite (u_n) définie par : pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_n = \frac{3^n}{(n^2+2)2^n}.$$

1. À l'aide de la calculatrice, conjecturer que (u_n) est monotone à partir d'un rang que l'on déterminera.

2. Justifier que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$.

3. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} - 1 = \frac{n(n-4)}{2((n+1)^2+2)}.$$

4. Valider ou infirmer la conjecture faite en question **1.**

Exercice 5. (bonus) — On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 2$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 1 - \frac{1}{u_n}$.

Montrer que la suite (u_{3n}) est constante.