

◆ Chapitre 8. — Applications de la dérivation

Rappels. — Soit f une fonction définie sur un intervalle I et $a \in I$. Pour tout réel $h \neq 0$ tel que $a + h \in I$, on note $t(h) = \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ le taux de variation de f entre a et $a + h$.

On dit que f est dérivable en a si $t(h)$ admet une limite finie lorsque h tend vers 0 et alors cette limite est appelée le nombre dérivée de f en a . On note alors ce nombre $f'(a)$.

Si f est dérivable en tout réel $a \in I$, on dit que f est dérivable sur I .

I. — Compléments sur la dérivation

1) Opérations algébriques

Propriété 1. — (Hors-programme)

Soit f une fonction définie sur un intervalle I et $a \in I$. Si f est dérivable en a alors $\lim_{h \rightarrow 0} f(a+h) = f(a)$.

Démonstration. Posons, pour tout $h \neq 0$ tel que $a + h \in I$, $t(h) = \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$. Alors, pour tout réel $h \neq 0$ tel que $a + h \in I$,

$$f(a+h) = f(a) + h \times t(h).$$

Or, comme f est dérivable en a , $\lim_{h \rightarrow 0} t(h) = f'(a)$ donc $\lim_{h \rightarrow 0} h \times t(h) = 0 \times f'(a) = 0$ et ainsi $\lim_{h \rightarrow 0} f(a+h) = f(a) + 0 = f(a)$. \square

Définition 2 : Opérations algébriques sur les fonctions

Soit u et v deux fonctions définies sur un même ensemble E .

1. On définit sur E la fonction $s = u + v$, somme de u et v , par $s : x \mapsto u(x) + v(x)$.
2. On définit sur E la fonction $p = uv$, produit de u et v , par $p : x \mapsto u(x) \times v(x)$.
3. Si u ne s'annule pas sur E , on définit sur E la fonction $i = \frac{1}{u}$, inverse de u , par $i : x \mapsto \frac{1}{u(x)}$.
4. Si v ne s'annule pas sur E , on définit sur E la fonction $q = \frac{u}{v}$, quotient de u par v , par $q : x \mapsto \frac{u(x)}{v(x)}$.

Exemple 3.

1. La fonction $f : x \mapsto x^2 + x^3$ définie sur \mathbb{R} est la somme de la fonction carré et de la fonction cube.
2. La fonction $f : x \mapsto x\sqrt{x}$ définie sur $[0; +\infty[$ est le produit de la fonction affine $x \mapsto x$ et de la fonction racine carrée.
3. La fonction $f : x \mapsto \frac{1}{x^3}$ définie sur \mathbb{R}^* est l'inverse de la fonction cube.
4. La fonction $f : x \mapsto \frac{x+2}{x-3}$ définie sur $\mathbb{R} \setminus \{3\}$ est le quotient des fonctions affines $x \mapsto x + 2$ et $x \mapsto x - 3$.

Remarque 4. Dans la définition précédente, la fonction u peut être une fonction constante. Ainsi, par exemple, la fonction $x \mapsto 3\sqrt{x}$ est le produit de la fonction constante $x \mapsto 3$ et de la fonction racine carrée.

Théorème 5. — Dérivée et opérations algébriques

On considère deux fonctions u et v dérivables sur un même intervalle I .

1. La fonction $u + v$ est dérivable sur I et $(u + v)' = u' + v'$.

2. La fonction uv est dérivable sur I est $(uv)' = u'v + uv'$.

En particulier, si k est une constante alors $(kv)' = kv'$.

3. Si la fonction u ne s'annule pas sur I alors $\frac{1}{u}$ est dérivable sur I est $(\frac{1}{u})' = -\frac{u'}{u^2}$.

4. Si la fonction v ne s'annule pas sur I alors $\frac{u}{v}$ est dérivable sur I est $(\frac{u}{v})' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$.

Démonstration. Soit $a \in I$ et $h \neq 0$ tel que $a + h \in I$.

1. On a

$$\begin{aligned} t(h) &= \frac{(u + v)(a + h) - (u + v)(a)}{h} = \frac{u(a + h) + v(a + h) - u(a) - v(a)}{h} \\ &= \frac{u(a + h) - u(a)}{h} + \frac{v(a + h) - v(a)}{h} \end{aligned}$$

Ainsi, $t(h)$ est la somme du taux de variation de u entre a et $a + h$ et du taux de variation de v entre a et $a + h$. Comme u et v sont dérivables en a , ces deux taux de variations convergent respectivement vers $u'(a)$ et $v'(a)$ donc $t(h)$ converge vers $u'(a) + v'(a)$. Ainsi, $u + v$ est dérivable en a et $(u + v)'(a) = u'(a) + v'(a)$.

2. On a

$$\begin{aligned} t(h) &= \frac{(uv)(a + h) - (uv)(a)}{h} \\ &= \frac{u(a + h)v(a + h) - u(a)v(a)}{h} \\ &= \frac{u(a + h)v(a + h) - u(a)v(a + h) + u(a)v(a + h) - u(a)v(a)}{h} \\ &= \frac{[u(a + h) - u(a)]v(a + h) + u(a)[v(a + h) - v(a)]}{h} \\ &= \frac{u(a + h) - u(a)}{h}v(a + h) + u(a)\frac{v(a + h) - v(a)}{h} \end{aligned}$$

Comme u et v sont dérivables en a , $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{u(a+h) - u(a)}{h} = u'(a)$ et $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{v(a+h) - v(a)}{h} = v'(a)$. De plus, d'après la propriété 1, $\lim_{h \rightarrow 0} v(a + h) = v(a)$ donc $\lim_{h \rightarrow 0} t(h) = u'(a)v(a) + u(a)v'(a)$. Ainsi, uv est dérivable en a et $(uv)'(a) = u'(a)v(a) + u(a)v'(a)$.

Si u est une fonction constante égale à k alors $u'(a) = 0$ donc $(kv)'(a) = 0 \times v(a) + k \times v'(a) = kv'(a)$.

3. On suppose que $u(a) \neq 0$. D'après la propriété 1, $\lim_{h \rightarrow 0} u(a + h) = u(a) \neq 0$ donc, pour h suffisamment proche de 0, $u(a + h) \neq 0$. Alors,

$$t(h) = \frac{\frac{1}{u(a+h)} - \frac{1}{u(a)}}{h} = \frac{\frac{u(a) - u(a+h)}{u(a+h)u(a)}}{h} = -\frac{1}{u(a)u(a+h)} \times \frac{u(a+h) - u(a)}{h}$$

Comme u est dérivable en a , on a $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{u(a+h) - u(a)}{h} = u'(a)$ et, d'après la propriété 1, $\lim_{h \rightarrow 0} u(a + h) = u(a)$ donc $\lim_{h \rightarrow 0} t(h) = -\frac{1}{u(a)u(a)} \times u'(a) = -\frac{u'(a)}{u(a)^2}$. Ainsi, $\frac{1}{u}$ est dérivable en a et $(\frac{1}{u})'(a) = -\frac{u'(a)}{u(a)^2}$.

4. D'après le point **3.**, $\frac{1}{v}$ est dérivable sur I donc, d'après le point **2.**, $u \times \frac{1}{v}$ est dérivable sur I i.e. $\frac{u}{v}$ est dérivable sur I et

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \left(u \times \frac{1}{v}\right)' = u' \times \frac{1}{v} + u \times \left(-\frac{v'}{v^2}\right) = \frac{u'}{v} - \frac{uv'}{v^2} = \frac{u'v - uv'}{v^2}.$$

□

Remarque 6.

1. Si u , v et w sont trois fonctions dérivables sur un même intervalle I alors, de même, $u + v + w$ est dérivable sur I et

$$(u + v + w)' = u' + (v + w)' = u' + v' + w'$$

Ceci se généralise à une somme de n fonctions pour tout entier $n \geq 2$.

2. Si u et v sont deux fonctions dérivables sur un intervalle I alors, d'après les points **1.** et **2.** de la propriété précédente, la fonction $u - v = u + (-v)$ est dérivable sur I et

$$(u - v)' = u' + (-1 \times v)' = u' + (-1)v' = u' - v'.$$

Exemple 7.

1. Considérons la fonction $f : x \mapsto x^3 - 3x^2 + 5$ définie sur \mathbb{R} . Alors, f est la somme de 3 fonctions dérivables sur $\mathbb{R} : u : x \mapsto x^3$, $v : x \mapsto -3x^2$ et $w : x \mapsto 5$. Ainsi, f est dérivable sur \mathbb{R} et, pour tout réel x ,

$$f'(x) = u'(x) + v'(x) + w'(x) = 3x^2 + (-3) \times 2x + 0 = 3x^2 - 6x.$$

2. Considérons $f : x \mapsto x\sqrt{x}$ définie sur $]0; +\infty[$. Alors, f est le produit de deux fonctions dérivables sur $]0; +\infty[$: la fonction $u : x \mapsto x$ et la fonction $v : x \mapsto \sqrt{x}$. Ainsi, f est dérivable sur $]0; +\infty[$ et, pour tout réel $x > 0$,

$$f'(x) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x) = 1 \times \sqrt{x} + x \times \frac{1}{2\sqrt{x}} = \sqrt{x} + \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{x^2}}{\sqrt{x}} = \sqrt{x} + \frac{1}{2}\sqrt{x} = \frac{3}{2}\sqrt{x}.$$

Le théorème 5 ne dit rien de la dérivabilité de f en 0 (il ne permet d'affirmer ni qu'elle est dérivable en 0 ni qu'elle n'est pas dérivable en 0). En l'occurrence, ici, on a vu dans l'exemple 7 du chapitre 2 que f est dérivable en 0 et que $f'(0) = 0$ mais pour cela il faut revenir à la définition à l'aide du taux de variation.

3. Considérons la fonction $f : x \mapsto \frac{x^2-1}{x^2+1}$ définie sur \mathbb{R} . Alors, f est le quotient de deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R} : la fonction $u : x \mapsto x^2 - 1$ et la fonction $v : x \mapsto x^2 + 1$. De plus, v ne s'annule pas sur \mathbb{R} donc f est dérivable sur \mathbb{R} et, pour tout réel x ,$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{v(x)^2} = \frac{2x \times (x^2 + 1) - (x^2 - 1) \times 2x}{(x^2 + 1)^2} \\ &= \frac{2x^3 + 2x - 2x^3 + 2x}{(x^2 + 1)^2} = \frac{4x}{(x^2 + 1)^2}. \end{aligned}$$

Pour finir, nous énonçons le résultat suivant qui généralise la propriété 22 du chapitre 2.

Propriété 8. — Dérivabilité des puissances entières

Soit $n \in \mathbb{Z}$. La fonction $f : x \mapsto x^n$ est dérivable sur $]-\infty; 0[$ et sur $]0; +\infty[$ si $n < 0$ et sur \mathbb{R} si $n \geq 0$. Dans les deux cas, la dérivée est donnée par $f' : x \mapsto nx^{n-1}$.

Démonstration. On procède par disjonction de cas.

1^{er} cas : si $n = 0$. Dans ce cas, la fonction f est constante égale à 1 donc f est dérivable sur \mathbb{R} et, pour tout réel x , $f'(x) = 0 = 0 \times x^{-1}$.

2^e cas : si $n > 0$. Soit $a \in \mathbb{R}$ et $h \neq 0$. D'après le lemme 30 du chapitre 1,

$$\begin{aligned}(a+h)^n - a^n &= (a+h-a) \left[(a+h)^{n-1} + (a+h)^{n-2}a + (a+h)^{n-3}a^2 + \cdots + (a+h)a^{n-2} + a^{n-1} \right] \\ &= h \left[(a+h)^{n-1} + (a+h)^{n-2}a + (a+h)^{n-3}a^2 + \cdots + (a+h)a^{n-2} + a^{n-1} \right]\end{aligned}$$

Ainsi,

$$t(h) = \frac{(a+h)^n - a^n}{h} = (a+h)^{n-1} + (a+h)^{n-2}a + (a+h)^{n-3}a^2 + \cdots + (a+h)a^{n-2} + a^{n-1}.$$

Or, pour tout entier k , $\lim_{h \rightarrow 0} (a+h)^k = a^k$ donc

$$\begin{aligned}\lim_{h \rightarrow 0} t(h) &= a^{n-1} + a^{n-2}a + a^{n-3}a^2 + \cdots + aa^{n-2} + a^{n-1} \\ &= \underbrace{a^{n-1} + a^{n-1} + \cdots + a^{n-1}}_{n \text{ fois}} \\ &= na^{n-1}.\end{aligned}$$

Ainsi, f est dérivable en a et $f'(a) = na^{n-1}$.

3^e cas : si $n < 0$. Soit $a \neq 0$. Alors, $f(a) = \frac{1}{a^{-n}}$. Or, d'après le cas précédente, comme $-n > 0$, la fonction $u : x \mapsto x^{-n}$ est dérivable en a et $u'(a) = (-n)a^{-n-1}$ donc, d'après le point 3. du théorème 5, f est dérivable en a et

$$f'(a) = -\frac{u'(a)}{u(a)^2} = -\frac{-na^{-n-1}}{(a^{-n})^2} = na^{-n-1+2n} = na^{n-1}.$$

□

Exemple 9.

1. La fonction $f : x \mapsto x^5$ est dérivable sur \mathbb{R} (car $5 \geq 0$) et $f' : x \mapsto 5x^4$.
2. La fonction $f : x \mapsto \frac{1}{x^2}$ est dérivable sur $]-\infty; 0[$ et sur $]0; +\infty[$ (car $f : x \mapsto x^{-2}$ et $-2 < 0$) et $f' : x \mapsto -2x^{-3}$ i.e. $f' : x \mapsto -\frac{2}{x^3}$.

2) Composition d'une fonction affine suivie d'une fonction

Exemple 10. Considérons la fonction $f : x \mapsto (4x - 3)^7$. Si on veut calculer l'image de 2 par cette fonction, on calcule d'abord $4 \times 2 - 3 = 5$ puis on calcule $5^7 = 78125$. En faisant cela, on décompose naturellement la fonction f en une succession de deux fonctions : la fonction affine $x \mapsto 4x - 3$ suivie de la fonction $u : x \mapsto x^7$. Ainsi, pour tout réel x , on a $f(x) = u(4x - 3)$ i.e. appliquer f à x revient à commencer par calculer $4x - 3$ puis à appliquer u au résultat de ce calcul.

Propriété 11

Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I et m et p deux réels. On note J un intervalle tel que, pour tout $x \in J$, $mx + p \in I$. Alors, la fonction $f : x \mapsto u(mx + p)$ est dérivable sur J et, pour tout $x \in J$, $f'(x) = mu'(mx + p)$.

Démonstration. Soit $a \in J$ et $h \neq 0$ tel que $a + h \in J$. Alors,

$$t(h) = \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \frac{u(m(a+h) + p) - u(ma + p)}{h} = m \times \frac{u(ma + p + mh) - u(ma + p)}{mh}$$

Posons, pour alléger l'écriture, $A = ma + p$ et $H = mh$. Alors,

$$t(h) = m \times \frac{u(A+H) - u(A)}{H}$$

Or, lorsque h tend vers 0, $H = mh$ tend aussi vers 0. De plus, $a \in J$ donc $A = ma + p \in I$ et ainsi u est dérivable en A . Il s'ensuit que $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{u(A+H) - u(A)}{H} = u'(A) = u'(ma + p)$ donc $\lim_{h \rightarrow 0} t(h) = mu'(ma + p)$. Ainsi, f est dérivable en a et $f'(a) = mu'(ma + p)$. \square

Exemple 12.

1. Considérons la fonction $f : x \mapsto (4x - 3)^7$. Alors, pour tout réel x , $f(x) = u(4x - 3)$ où $u : x \mapsto x^7$. La fonction u est dérivable sur \mathbb{R} et, pour tout réel x , $u'(x) = 7x^6$. Dès lors, la fonction f est dérivable sur \mathbb{R} et, pour tout réel x , $f'(x) = 4 \times 7(4x - 3)^6 = 28(4x - 3)^6$.
2. Considérons la fonction $f : x \mapsto \sqrt{1 - 2x}$. Alors, pour tout réel x , $f(x) = u(-2x + 1)$ où $u : x \mapsto \sqrt{x}$. La fonction u est dérivable sur $]0; +\infty[$ et, pour tout réel $x > 0$, $u'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$. Or, pour tout réel x , $-2x + 1 > 0$ si et seulement si $x < \frac{1}{2}$ donc la fonction f est dérivable sur $] -\infty; \frac{1}{2}[$ et, pour tout réel $x < \frac{1}{2}$, $f'(x) = -2 \times \frac{1}{2\sqrt{1-2x}} = -\frac{1}{\sqrt{1-2x}}$.

II. — Lien entre variation d'une fonction et signe de sa dérivée

Théorème 13. — (Admis)

Soit f une fonction définie sur un intervalle I .

1. La fonction f est croissante sur I si et seulement si $f'(x) \geq 0$ pour tout $x \in I$.
2. La fonction f est décroissante sur I si et seulement si $f'(x) \leq 0$ pour tout $x \in I$.
3. La fonction f est constante sur I si et seulement si $f'(x) = 0$ pour tout $x \in I$.

Exemple 14. Considérons la fonction $f : x \mapsto x^3 - 12x + 1$. La fonction f est dérivable sur \mathbb{R} comme somme de fonctions dérivables et, pour tout réel x , $f'(x) = 3x^2 - 12 = 3(x^2 - 4) = 3(x-2)(x+2)$. Ainsi, f' est une fonction trinôme du second degré dont les racines sont évidentes : 2 et -2. Comme le coefficient dominant est $a = 3 > 0$, on en déduit que $f'(x) \geq 0$ pour tout $x \in]-\infty; -2] \cup [2; +\infty[$ et $f'(x) \leq 0$ pour tout $x \in [-2; 2]$.

On conclut donc que f est croissante sur $] -\infty; -2]$, décroissante sur $[-2; 2]$ et croissante sur $[2; +\infty[$.

Le théorème n'est valable que sur un intervalle : il faut donc découper l'étude sur chaque intervalle où f' est de signe constant.



En particulier, dans l'exemple précédent, $f'(x) \geq 0$ pour tout $x \in]-\infty; -2] \cup [2; +\infty[$ mais on ne peut pas en déduire que f est croissante sur $]-\infty; -2] \cup [2; +\infty[$ car cet ensemble n'est pas un intervalle. D'ailleurs, f n'est pas croissante sur $]-\infty; -2] \cup [2; +\infty[$ car $f(-3) = 10 > -8 = f(3)$ bien que $-3 < 3$.

Remarque 15. Dans le théorème précédent, si $f'(x) > 0$ (resp. $f'(x) < 0$) pour tout $x \in I$, on peut dire que f est strictement croissante (resp. strictement décroissante) sur I . La réciproque en revanche est fautive. Par exemple, la fonction cube $f : x \mapsto x^3$ est strictement croissante sur \mathbb{R} mais $f'(0) = 0$. En effet, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = 3x^2$. Pour tout $x \neq 0$, $f'(x) > 0$ donc f est strictement croissante sur $]-\infty; 0[$ et sur $]0; +\infty[$. De plus, si $a < 0$ alors $f(a) = a^3 < 0$ donc $f(a) < f(0)$ et si $a > 0$ alors $f(a) = a^3 > 0$ donc $f(a) > f(0)$. Ainsi, f est bien strictement croissante sur \mathbb{R} mais $f'(0) = 0$.

Propriété 16

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I .

1. Si $f'(x) \geq 0$ pour tout $x \in I$ et si $f'(x) = 0$ pour un nombre fini de valeurs de x alors f est strictement croissante sur I .
2. Si $f'(x) \leq 0$ pour tout $x \in I$ et si $f'(x) = 0$ pour un nombre fini de valeurs de x alors f est strictement décroissante sur I .

Exemple 17.

1. Considérons la fonction $f : x \mapsto x^3 + x + 1$. Alors, f est dérivable sur \mathbb{R} comme somme de fonctions dérivables et, pour tout réel x , $f'(x) = 3x^2 + 1 > 0$ donc f est strictement croissante sur \mathbb{R} .
2. Considérons la fonction $f : x \mapsto -3x^5 - 5x^3 + 1$. Alors, f est dérivable sur \mathbb{R} comme somme de fonctions dérivables et, pour tout réel x , $f'(x) = -15x^4 - 15x^2 = -15x^2(x^2 + 1)$. Ainsi, pour tout réel x , $f'(x) \leq 0$ et, de plus, $f'(x) = 0$ si et seulement si $x = 0$ donc f est strictement décroissante sur \mathbb{R} .

III. — Extremum

Définition 18

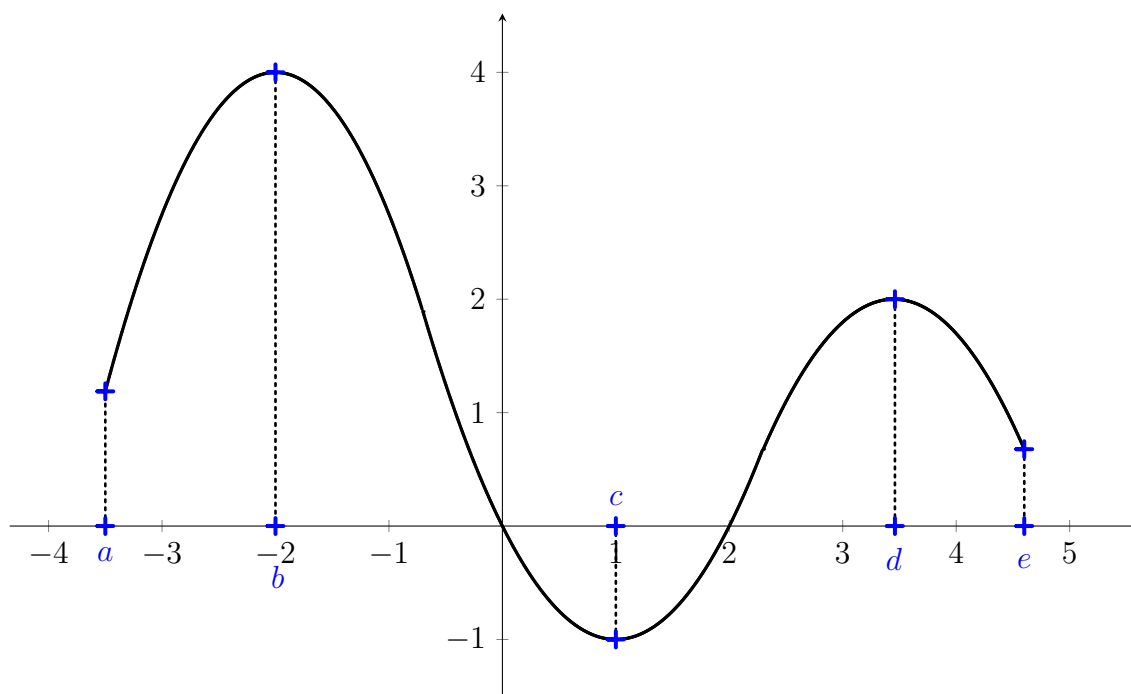
Soit f une fonction définie sur un intervalle I . Soit $a \in I$. On dit que f présente :

1. un minimum local en a s'il existe un intervalle ouvert J contenant a tel que, pour tout $x \in J \cap I$, $f(x) \geq f(a)$;
2. un maximum local en a s'il existe un intervalle ouvert J contenant a tel que, pour tout $x \in J \cap I$, $f(x) \leq f(a)$;
3. un minimum global en a sur I si, pour tout $x \in I$, $f(x) \geq f(a)$;
4. un maximum global en a sur I si, pour tout $x \in I$, $f(x) \leq f(a)$;

Un minimum ou un maximum local (resp. global) est appelé un extremum local (resp. global).

Remarque 19. Un extremum global est un extremum local (il suffit de prendre $J = \mathbb{R}$) mais la réciproque est fautive.

Exemple 20. On a représenté ci-dessous la courbe d'une fonction f définie sur l'intervalle $[a; e]$.



La fonction f présente 5 extremums : 3 minimums locaux en a , c et e et 2 maximums locaux en b et d . De plus, en b et en c , les extremums sont globaux sur $I = [a; e]$.

Remarque 21. La notion d'extremum global est relative à l'intervalle sur lequel on se place. Dans l'exemple ci-dessus, f présente un maximum local mais pas global en d sur $[a; e]$ mais si on restreint la fonction à $[c; e]$ alors f présente un maximum global en d sur $[c; e]$.

Théorème 22. — (Admis)

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I et a un élément de I qui n'est pas une borne de I . Si f présente un extremum local en a alors $f'(a) = 0$.

Remarque 23.

1. Le théorème précédent est faux si a est une borne de I . Par exemple, la fonction $f : x \mapsto 2x + 1$ définie sur $[0; 1]$ présente un minimum global en 0 et un maximum global en 1 (car f est croissante sur $[0; 1]$). Pour autant, $f'(0)$ et $f'(1)$ sont non nuls puisque que $f'(0) = f'(1) = 2$.
2. La réciproque du théorème précédent est fautive. Par exemple, si f est la fonction cube alors $f'(0) = 0$ mais f ne présente pas d'extremum en $a = 0$ car f est strictement croissante sur \mathbb{R} d'après l'exemple 15.

En fait, si f est une fonction dérivable sur un intervalle I , si a n'est pas une borne de I et si f n'est pas constante au voisinage de a alors f présente un extremum en a si et seulement si sa fonction dérivée f' s'annule en a en changeant de signe.

3. Graphiquement, le théorème précédent se traduit par le fait que si f présente un extremum local en a alors la tangente à \mathcal{C}_f en a est horizontale.

Propriété 24. — Retour sur les fonctions polynômes du second degré

Soit a, b et c trois réels tels que $a \neq 0$ et $f : x \mapsto ax^2 + bx + c$.

1. Si $a > 0$ alors f est strictement décroissante sur $]-\infty ; -\frac{b}{2a}]$ et strictement croissante sur $[-\frac{b}{2a} ; +\infty[$. En particulier, f admet un minimum global en $-\frac{b}{2a}$.
2. Si $a < 0$ alors f est strictement croissante sur $]-\infty ; -\frac{b}{2a}]$ et strictement décroissante sur $[-\frac{b}{2a} ; +\infty[$. En particulier, f admet un maximum global en $-\frac{b}{2a}$.

Démonstration. La fonction f est dérivable sur \mathbb{R} comme somme de fonctions dérivables et, pour tout réel x , $f'(x) = 2ax + b$. Ainsi, la fonction f' est une fonction affine qui s'annule en $-\frac{b}{2a}$.

1. Si $a > 0$, $f'(x) \leq 0$ si $x \in]-\infty ; -\frac{b}{2a}]$, $f'(x) \geq 0$ si $x \in]-\frac{b}{2a} ; +\infty[$ et f' ne s'annule qu'en $-\frac{b}{2a}$ donc f est strictement décroissante sur $]-\infty ; -\frac{b}{2a}]$ et strictement croissante sur $[-\frac{b}{2a} ; +\infty[$.
2. Si $a < 0$, $f'(x) \geq 0$ si $x \in]-\infty ; -\frac{b}{2a}]$, $f'(x) \leq 0$ si $x \in]-\frac{b}{2a} ; +\infty[$ et f' ne s'annule qu'en $-\frac{b}{2a}$ donc f est strictement croissante sur $]-\infty ; -\frac{b}{2a}]$ et strictement décroissante sur $[-\frac{b}{2a} ; +\infty[$.

□

Remarque 25. Dorénavant, on pourra utiliser que les fonctions trinômes du second degré — et même, de façon plus générale, toutes les fonctions polynômes — sont dérivables sur \mathbb{R} .

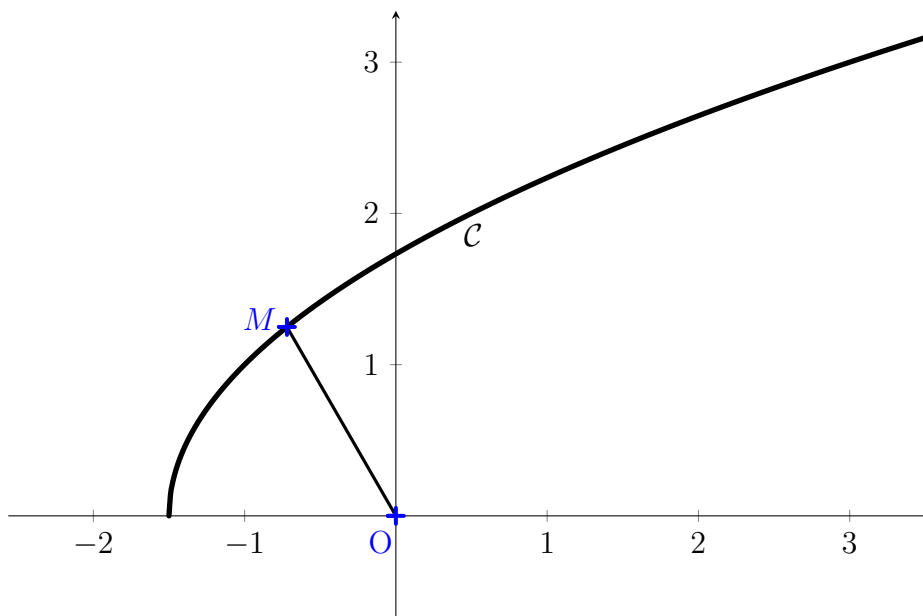
IV. — Quelques exemples d'application

1) Résoudre un problème d'optimisation

Une étude de fonction, et notamment la détermination d'extremums globaux, peut permettre de résoudre des problèmes d'optimisation comme déterminer une aire minimale ou maximale, une distance minimale ou maximale, un temps minimal ou maximal... dans une situation donnée.

Exercice 26. On considère, dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$, la courbe \mathcal{C} représentative de la fonction $f : x \mapsto \sqrt{2x+3}$ définie sur $[-\frac{3}{2}; +\infty[$.

Déterminer le(s) point(s) de la courbe \mathcal{C} le(s) plus proche(s) de l'origine O du repère.



Solution. — Soit $x \in \left[-\frac{3}{2}; +\infty\right[$ et M le point de coordonnées $(x; f(x))$. La question revient à déterminer x tel que la distance OM soit minimale. Comme une distance est positive et comme la fonction carré est croissante sur $[0; +\infty[$, cela revient à déterminer x tel que OM^2 soit minimale. Notons $d(x) = OM^2$. Comme le repère est orthonormé,

$$d(x) = x_M^2 + y_M^2 = x^2 + f(x)^2 = x^2 + \sqrt{2x+3}^2 = x^2 + 2x + 3.$$

Ainsi, $d(x)$ est un polynôme du second degré. Comme $a = 1 > 0$ et $b = 2$, la fonction $x \mapsto d(x)$ atteint son minimum global en $-\frac{2}{2 \times 1} = -1$.

Ainsi, il existe un unique M tel que OM soit minimale : il s'agit du point de coordonnées $(1; f(1))$ i.e. $(1; \sqrt{5})$.

2) Démontrer une inégalité

Une étude de fonction, et notamment la détermination d'extremums globaux, peut permettre de démontrer des inégalités.

Exercice 27. Démontrer que, pour tout réel $x \geq -2$, $x^3 \geq 3x - 2$.

Solution. — Considérons la fonction $f : x \mapsto x^3 - (3x - 2)$ définie sur $[-2; +\infty[$. Ainsi, pour tout réel $x \geq -2$, $f(x) = x^3 - 3x + 2$.

La fonction f est dérivable sur $[-2; +\infty[$ comme somme de fonctions dérivables et, pour tout réel $x \geq -2$, $f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x^2 - 1) = 3(x - 1)(x + 1)$.

Ainsi, $f'(x)$ est un trinôme du second degré dont les racines sont évidentes : -1 et 1 . Comme $a = 3 > 0$, on en déduit que $f'(x) \geq 0$ pour tout $x \in [-2; -1] \cup [1; +\infty[$ et $f'(x) \leq 0$ pour tout $x \in [-1; 1]$. Dès lors, f est croissante sur $[-2; -1]$, décroissante sur $]-1; 1]$ et croissante sur $[1; +\infty[$.

On a donc le tableau de variation ci-dessous :

x	-2	-1	1	$+\infty$
Variation de f		4		
	0	↗ ↘	0	↗

Ainsi, f admet un minimum global en -2 et 1 qui vaut 0 donc, pour tout réel $x \geq -2$, $f(x) \geq 0$. Il s'ensuit que, pour tout $x \geq -2$, $x^3 - (3x - 2) \geq 0$ i.e. $x^3 \geq 3x - 2$.

3) Étudier la position relative de deux courbes

Étant donné deux fonctions f et g définie sur un même ensemble E , une étude de fonction peut permettre d'étudier la position relative des courbes \mathcal{C}_f et \mathcal{C}_g . Plus précisément, pour tout $x \in E$, on dit que :

1. \mathcal{C}_f est au-dessus de \mathcal{C}_g à l'abscisse x si $f(x) > g(x)$,
2. \mathcal{C}_f est en dessous de \mathcal{C}_g à l'abscisse x si $f(x) < g(x)$,
3. \mathcal{C}_f et \mathcal{C}_g se coupent (ou sont sécantes) à l'abscisse x si $f(x) = g(x)$.

Ainsi, étudier les positions relatives de f et g revient à étudier le signe de la fonction $d : x \mapsto f(x) - g(x)$ définie sur E .

Exercice 28. Soit $f : x \mapsto 3x^4$ et $g : x \mapsto 5x^3 + 8$ définies sur \mathbb{R} . Étudier la position relative des courbes \mathcal{C}_f et \mathcal{C}_g .

Solution. — Considérons la fonction $d : x \mapsto f(x) - g(x)$ définie sur \mathbb{R} . Alors, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $d(x) = 3x^4 - 5x^3 - 8$.

La fonction d est dérivable sur \mathbb{R} comme somme de fonctions dérivables et, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $d'(x) = 12x^3 - 15x^2 = 3x^2(4x - 5)$. Pour tout réel x , $x^2 \geq 0$ donc le signe de $d'(x)$ est le signe de $4x - 5$. Ainsi, $d'(x) \leq 0$ si $x \in]-\infty; \frac{5}{4}]$ et $d'(x) \geq 0$ si $x \in [\frac{5}{4}; +\infty[$. De plus, $d'(x)$ ne s'annule que pour $x = 0$ et $x = \frac{5}{4}$ donc f est strictement décroissante sur $] -\infty; \frac{5}{4}]$ et strictement croissante sur $[\frac{5}{4}; +\infty[$.

On a donc le tableau de variation suivant

x	$-\infty$	$\frac{5}{4}$	$+\infty$
Variation de d			

Si $d(\frac{5}{4})$ avait été positif, on aurait pu conclure que $d(x) \geq 0$ pour tout réel x . Ce n'est pas le cas et le calcul de quelques valeurs (ou l'utilisation de la calculatrice pour tracer la courbe) montre que d change de signe. Cependant, le tableau nous assure que d s'annule en changeant de signe au maximum 2 fois.

À l'aide de la fonction `solver` de la calculatrice ou à l'aide de la courbe de \mathcal{C}_d tracé sur l'écran de la calculatrice, on peut essayer de conjecturer les valeurs en lesquelles d s'annule.

On trouve -1 et 2 et effectivement

Remarque 29. Si on veut une position relative au sens stricte (\mathcal{C}_f strictement au-dessus ou strictement en dessous de \mathcal{C}_g), il suffit d'établir des inégalités strictes ($d(x) > 0$ ou $d(x) < 0$).

$$d(-1) = 3(-1)^4 - 5(-1)^3 - 8 = 3 + 5 - 8 = 0 \text{ et } d(2) = 3 \times 2^4 - 5 \times 2^3 - 8 = 48 - 40 - 8 = 0.$$

On peut donc compléter le tableau avec ses valeurs :

x	$-\infty$	-1	$\frac{5}{4}$	2	$+\infty$
Variation de d					

On en déduit que $d(x) \geq 0$ pour tout $x \in]-\infty; -1]$, $d(x) < 0$ pour tout $x \in [-1; 2]$, $d(x) > 0$ pour tout $x \in [2; +\infty[$ et $d(-1) = d(2) = 0$.

On conclut donc que \mathcal{C}_f est au-dessus de \mathcal{C}_g sur $] -\infty; -1[\cup] 2; +\infty[$, en-dessous de \mathcal{C}_g sur $]-1; 2[$ et les deux courbes se coupent en -1 et 2 .

4) Étudier les variations d'une suite

Soit $N \in \mathbb{N}$. On considère une fonction f définie sur un ensemble contenant $[N; +\infty[$ et $(u_n)_{n \geq N}$ la suite définie, pour tout entier $n \geq N$, par $u_n = f(n)$.

Si f est croissante sur $[N; +\infty[$ alors $u_n = f(n) \leq f(n+1) = u_{n+1}$ donc (u_n) est croissante à partir du rang N et f est décroissante sur $[N; +\infty[$ alors $u_n = f(n) \geq f(n+1) = u_{n+1}$ donc (u_n) est décroissante à partir du rang N .

Ainsi, pour étudier les variations de la suite (u_n) , on peut étudier les variations de la fonction f .

Exercice 30. Étudier les variations de la suite (u_n) définie par : pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_n = -n^5 + 5n^3 + 1.$$

Solution. — Considérons la fonction $f : x \mapsto -x^5 + 5x^3 + 1$ définie sur $[0; +\infty[$. Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = f(n)$.

La fonction f est dérivable sur \mathbb{R} comme somme de fonctions dérivables et, pour tout réel $x \geq 0$,

$$f'(x) = -5x^4 + 5 \times 3x^2 = 5x^2(3 - x^2) = 5x^2(\sqrt{3} - x)(\sqrt{3} + x).$$

Or, pour tout réel $x \geq 0$, $x^2(\sqrt{3} + x) \geq 0$ donc $f'(x)$ est du signe de $\sqrt{3} - x$ i.e. $f'(x) \geq 0$ si $x \in [0; \sqrt{3}]$ et $f'(x) \leq 0$ si $x \in [\sqrt{3}; +\infty[$. En particulier, f est décroissante sur $[\sqrt{3}; +\infty[$ donc, comme $\sqrt{3} \approx 1,7$, on en déduit que (u_n) est décroissante à partir du rang 2.