⧫ Chapitre 7. — Inéquations du second degré

Dans toute le chapitre, a, b et c désignent trois réels tels que $a \neq 0$ et f est la fonction polynôme du second degré $f : x \mapsto ax^2 + bx + c$.

On rappelle que d'après les résultats du chapitre 1, on peut écrire f sous forme canonique $f : x \mapsto a\left[(x+\alpha)^2 - \beta\right]$ avec $\alpha = \frac{b}{2a}$ et $\beta = \frac{b^2-4ac}{4a^2}$.

I. — Variation des fonctions polynômes du second degré

1) Variations

Théorème 1

1. Si $a > 0$ alors f est strictement décroissante sur $\left]-\infty\,;-\frac{b}{2a}\right]$ et strictement croissante sur $\left[-\frac{b}{2a}\,;+\infty\right[$. En particulier, f admet un minimum en $-\frac{b}{2a}$.
2. Si $a < 0$ alors f est strictement croissante sur $\left]-\infty\,;-\frac{b}{2a}\right]$ et strictement décroissante sur $\left[-\frac{b}{2a}\,;+\infty\right[$. En particulier, f admet un maximum en $-\frac{b}{2a}$.

Démonstration. Soit x_1 et x_2 deux réels tels que $x_1 < x_2$.

1. On suppose $a > 0$. Si $x_2 \leqslant -\frac{b}{2a}$ i.e. $x_2 \leqslant -\alpha$ alors $x_1 + \alpha < x_2 + \alpha \leqslant 0$. Or, la fonction carré est strictement décroissante sur $]-\infty\,;0]$ donc $(x_1+\alpha)^2 > (x_2+\alpha)^2$ et ainsi $(x_1+\alpha)^2 - \beta > (x_2+\alpha)^2 - \beta$. Comme $a > 0$, on en déduit que $a\left[(x_1+\alpha)^2 - \beta\right] > a\left[(x_2+\alpha)^2 - \beta\right]$ i.e. $f(x_1) > f(x_2)$. Ainsi, f est strictement décroissante sur $\left]-\infty\,;-\frac{b}{2a}\right]$.

   Si $x_1 \geqslant -\frac{b}{2a}$ i.e. $x_1 \geqslant -\alpha$ alors $0 \leqslant x_1 + \alpha < x_2 + \alpha$. Or, la fonction carré est strictement croissante sur $[0\,;+\infty[$ donc $(x_1+\alpha)^2 < (x_2+\alpha)^2$ et ainsi $(x_1+\alpha)^2 - \beta < (x_2+\alpha)^2 - \beta$. Comme $a > 0$, on en déduit que $a\left[(x_1+\alpha)^2 - \beta\right] < a\left[(x_2+\alpha)^2 - \beta\right]$ i.e. $f(x_1) < f(x_2)$. Ainsi, f est strictement croissante sur $\left[-\frac{b}{2a}\,;+\infty\right[$.
2. On suppose $a < 0$. Si $x_2 \leqslant -\frac{b}{2a}$ i.e. $x_2 \leqslant -\alpha$ alors $x_1 + \alpha < x_2 + \alpha \leqslant 0$. Or, la fonction carré est strictement décroissante sur $]-\infty\,;0]$ donc $(x_1+\alpha)^2 > (x_2+\alpha)^2$ et ainsi $(x_1+\alpha)^2 - \beta > (x_2+\alpha)^2 - \beta$. Comme $a < 0$, on en déduit que $a\left[(x_1+\alpha)^2 - \beta\right] < a\left[(x_2+\alpha)^2 - \beta\right]$ i.e. $f(x_1) < f(x_2)$. Ainsi, f est strictement croissante sur $\left]-\infty\,;-\frac{b}{2a}\right]$.

   Si $x_1 \geqslant -\frac{b}{2a}$ i.e. $x_1 \geqslant -\alpha$ alors $0 \leqslant x_1 + \alpha < x_2 + \alpha$. Or, la fonction carré est strictement croissante sur $[0\,;+\infty[$ donc $(x_1+\alpha)^2 < (x_2+\alpha)^2$ et ainsi $(x_1+\alpha)^2 - \beta < (x_2+\alpha)^2 - \beta$. Comme $a < 0$, on en déduit que $a\left[(x_1+\alpha)^2 - \beta\right] > a\left[(x_2+\alpha)^2 - \beta\right]$ i.e. $f(x_1) > f(x_2)$. Ainsi, f est strictement décroissante sur $\left]-\frac{b}{2a}\,;+\infty\right]$.

□

On a donc les tableaux de variations suivants :

x	$-\infty$	$-\frac{b}{2a}$	$+\infty$
Variation de f	↘	$-\frac{b^2-4ac}{4a}$	↗

$a > 0$

x	$-\infty$	$-\frac{b}{2a}$	$+\infty$
Variation de f	↘	$-\frac{b^2-4ac}{4a}$	↗

$a < 0$

Exemple 2. Soit $f : x \mapsto -x^2 + 2x + 7$. On a $a = -1 < 0$ et $-\frac{b}{2a} = -\frac{2}{2\times(-1)} = 1$ donc f est strictement croissante sur $]-\infty\,;1]$ et f est strictement décroissante sur $[1\,;+\infty[$.

Exercice 3. Démontrer que, pour tout réel p, $p(1-p) \leqslant \frac{1}{4}$.

Solution. — Considérons la fonction $f : p \mapsto p(1-p)$. Alors, pour tout réel p, $f(p) = -p^2+p$ donc f est une fonction polynôme du second degré avec $a = -1$, $b = 1$ et $c = 0$. Comme $a < 0$, la fonction f admet un maximum en $-\frac{b}{2a} = -\frac{1}{2\times(-1)} = \frac{1}{2}$ i.e. pour tout réel p, $f(p) \leqslant f(\frac{1}{2})$. Or,

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}\times\frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

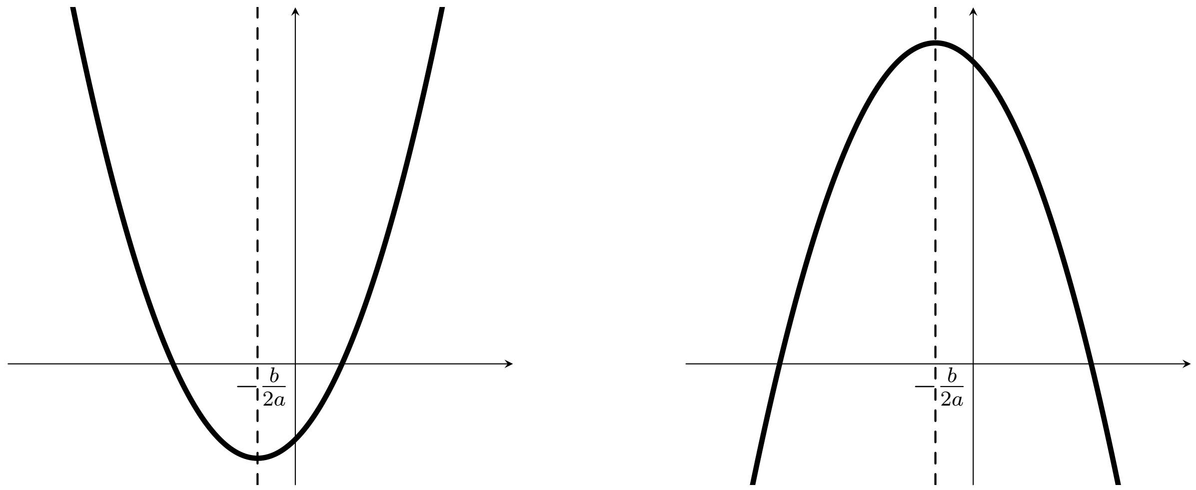
donc on conclut que, pour tout réel p, $p(1-p) \leqslant \frac{1}{4}$.

2) Courbe représentative

Définition 4

La courbe d'une fonction polynôme du second degré est une parabole.

Si $a > 0$, on dit que la parabole est tournée vers le haut et, si $a < 0$, on dit que la parabole est tournée vers la bas.



$a > 0$
la parabole est tournée vers le haut

$a < 0$
la parabole est tournée vers le bas

Propriété 5

La parabole $\mathcal{P}$ représentative de la fonction f est symétrique par rapport à la droite $\mathcal{D}$ d'équation $x = -\frac{b}{2a}$.

Démonstration. Rappelons que $\frac{b}{2a} = \alpha$. Dire que $\mathcal{P}$ est symétrique par rapport à la droite $\mathcal{D}$ signifie que, pour tout réel x, si le point de coordonnées $(-\alpha+x, y)$ appartient à $\mathcal{P}$ alors le point de coordonnées $(-\alpha-x, y)$ appartient également à $\mathcal{P}$. Ceci équivaut à dire que, pour tout réel x, $f(-\alpha+x) = f(-\alpha-x)$. Soit $x \in \mathbb{R}$. Alors, puisque $(-x)^2 = x^2$, on a

$$\begin{aligned} f(-\alpha+x) &= a\left[(-\alpha+x+\alpha)^2-\beta\right] = a\left[x^2-\beta\right] \\ &= a\left[(-x)^2-\beta\right] = a\left[(-\alpha-x+\alpha)^2-\beta\right] = f(-\alpha-x) \end{aligned}$$

Ainsi, on a conclut que $\mathcal{P}$ est symétrique par rapport à $\mathcal{D}$. $\square$

II. — Inéquation du second degré

1) Signe d'une fonction trinôme du second degré

Théorème 6

On note $\Delta = b^2 - 4ac$ le discriminant de f.

1. On suppose $\Delta > 0$ et on note x_1 et x_2 les deux racines de f (avec $x_1 < x_2$). Alors, $f(x)$ est du signe de a pour tout $x \in]-\infty\,;x_1[\cup]x_2\,;+\infty[$ et du signe contraire de a pour tout $x \in]x_1\,;x_2[$.
2. Si $\Delta = 0$ alors $f(x)$ est du signe de a pour tout $x \neq -\frac{b}{2a}$.
3. Si $\Delta < 0$ alors $f(x)$ est du signe de a pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Démonstration. On utilise la forme factorisée dans le cas où $\Delta > 0$ et la forme canonique dans les deux autres cas.

1. Si $\Delta > 0$ alors f se factorise : pour tout réel x, $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$. On peut donc faire un tableau de signe :

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
signe de a		signe de a		signe de a		signe de a	
signe de $x-x_1$		$-$	0	$+$		$+$	
signe de $x-x_2$		$-$		$-$	0	$+$	
signe de $f(x)$		signe de a	0	signe de $-a$	0	signe de a	

   Ainsi, $f(x)$ est du signe de a pour tout $x \in]-\infty\,;x_1[\cup]x_2\,;+\infty[$ et du signe contraire de a pour tout $x \in]x_1\,;x_2[$. (En x_1 et x_2, f s'annule.)
2. Si $\Delta = 0$ alors la forme canonique de f est $f : x \mapsto a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2$. Ainsi, pour tout réel $x \neq -\frac{b}{2a}$, $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 > 0$ donc $f(x)$ est du signe de a. (De plus, f s'annule en $-\frac{b}{2a}$.)
3. Si $\Delta < 0$ alors f ne se factorise pas dans $\mathbb{R}$ mais dans ce cas $\beta = \frac{\Delta}{4a^2} < 0$ donc $-\beta > 0$. Dès lors, pour tout réel x, $(x+\alpha)^2 - \beta > 0$ donc $f(x) = a\left[(x+\alpha)^2 - \beta\right]$ est du signe de a.

$\square$

Exemple 7.

1. Soit $f : x \mapsto x^2 + x + 1$. Le discriminant de f est $\Delta = 1^2 - 4 \times 1 \times 1 = -3 < 0$ donc, comme $a = 1 > 0$, pour tout réel x, $x^2 + x + 1 > 0$.
2. Soit $f : x \mapsto 2x^2 - 3x + 1$. La somme de coefficient de f est nulle donc 1 est racine de f. Or, le produit des racines est $\frac{1}{2}$ donc l'autre racine vaut $\frac{1}{2}$. Comme $a = 2 > 0$, on conclut que $f(x) \geqslant 0$ pour tout $x \in \left]-\infty\,;\frac{1}{2}\right] \cup [1\,;+\infty[$ et $f(x) \leqslant 0$ pour tout $x \in \left[\frac{1}{2}\,;1\right]$.
3. Soit $f : x \mapsto -x^2 + x + 1$. Le discriminant de f est $\Delta = 1^2 - 4 \times (-1) \times 1 = 5 > 0$ donc f possède deux racines réelles qui sont :

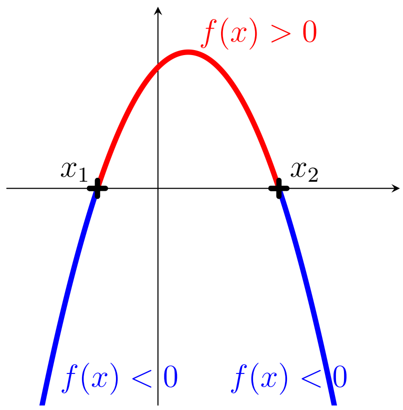
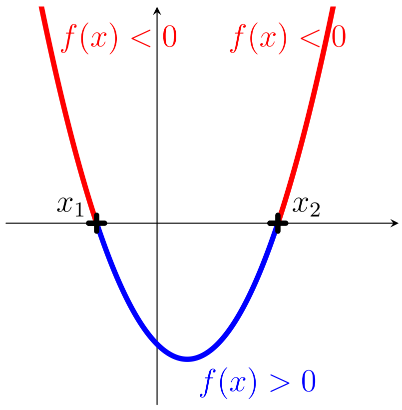
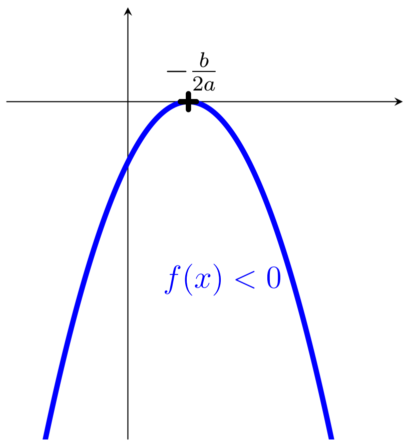
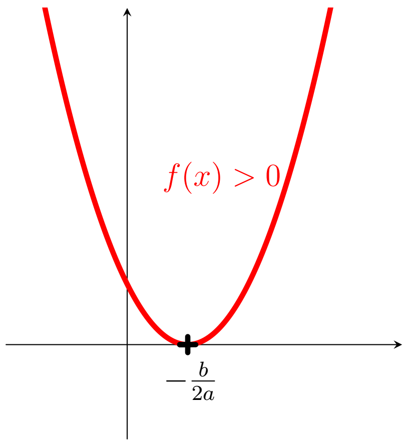
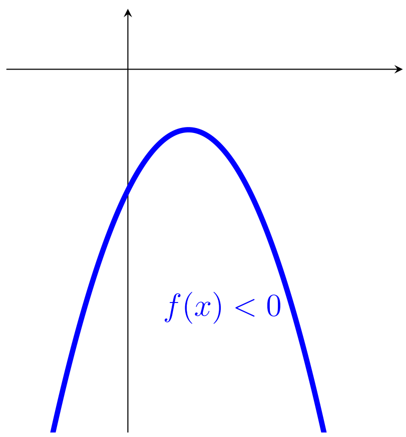
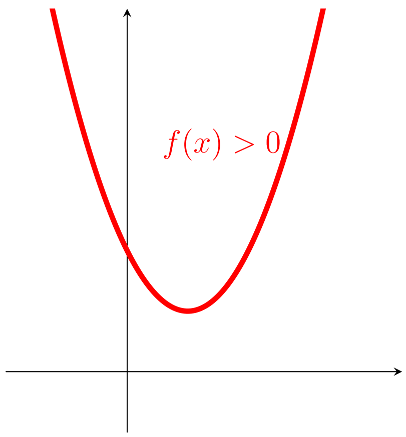
$$x_1 = \frac{-1+\sqrt{5}}{2 \times (-1)} = \frac{1-\sqrt{5}}{2} \qquad \text{et} \qquad x_2 = \frac{-1-\sqrt{5}}{2 \times (-1)} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

Comme $a = -1 < 0$, on conclut que $f(x) \leqslant 0$ pour tout réel $x \in \left]-\infty\,;\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right] \cup \left[\frac{\sqrt{5}+1}{2}\,;+\infty\right[$ et $f(x) \geqslant 0$ pour tout réel $x \in \left[\frac{\sqrt{5}-1}{2}\,;\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right]$.

4. Soit $f : x \mapsto \frac{1}{4}x^2 - x + 1$. Le discriminant de f est $\Delta = (-1)^2 - 4 \times \frac{1}{4} \times 1 = 0$ donc, comme $a = \frac{1}{4} > 0$, $f(x) \geqslant 0$ pour tout réel x et f ne s'annule qu'en $-\frac{-1}{2\times\frac{1}{4}} = 2$.

<u>Liens entre signe et variation</u>

Le signe d'une fonction trinôme peut être facilement retrouvé grâce à l'allure de la parabole qui la représente.

	$a < 0$	$a > 0$
$\Delta > 0$		
$\Delta = 0$		
$\Delta < 0$		

2) Exemples d'application à la résolution d'inéquations

Exemple 8. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $(I_1) : x^2 > 3x + 1$.

Commençons par remarquer que (I_1) équivaut à $x^2 - 3x - 1 > 0$ et étudions le signe de la fonction trinôme $f : x \mapsto x^2 - 3x - 1$. Son discriminant est $\Delta = (-3)^2 - 4 \times 1 \times (-1) = 13$ donc f possède deux racines réelles :

$$x_1 = \frac{-(-3) - \sqrt{13}}{2 \times 1} = \frac{3 - \sqrt{13}}{2} \qquad \text{et} \qquad x_2 = \frac{-(-3) + \sqrt{13}}{2 \times 1} = \frac{3 + \sqrt{13}}{2}.$$

Ainsi, comme $a = 1 > 0$, $f(x) > 0$ si et seulement si $x \in \left]\infty ; \frac{3-\sqrt{13}}{2}\right] \cup \left[\frac{3+\sqrt{13}}{2} ; +\infty\right[$.

On conclut que l'ensemble des solutions de (I_1) est $\left]\infty ; \frac{3-\sqrt{13}}{2}\right] \cup \left[\frac{3+\sqrt{13}}{2} ; +\infty\right[$.

Exemple 9. Déterminer l'ensemble de définition de la fonction $g : x \mapsto \sqrt{-x^2 + x + 2}$.

La fonction g est définie pour tout réel x tel que $-x^2 + x + 2 \geqslant 0$. Considérons la fonction $f : x \mapsto -x^2 + x + 2$. Le nombre -1 est une racine évidente de f et le produit des racines vaut $\frac{2}{-1} = -2$ donc l'autre racine est 2. Ainsi, comme $a = -1 < 0$, $f(x) \geqslant 0$ si et seulement si $x \in [-1 ; 2]$ donc l'ensemble de définition de g est $[-1 ; 2]$.

Exemple 10. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $(I_2) : 5x^2 - 7x + 3 < 0$.

Considérons la fonction $f : x \mapsto 5x^2 - 7x + 3$. Le discriminant de f est $(-7)^2 - 4 \times 5 \times 3 = -11 < 0$ donc, comme $a = 5 > 0$, pour tout réel x, $f(x) \geqslant 0$. On conclut que l'ensemble des solutions de (I_2) est $\varnothing$.

Exemple 11. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $(I_3) : x^4 - \sqrt{5}x^2 - 11 < 0$.

On se ramène à une inéquation du second degré par le changement d'inconnue $X = x^2$. L'inéquation (I_3) se réécrit alors $X^2 - \sqrt{5}X - 11 < 0$.

Considérons la fonction $f : X \mapsto X^2 - \sqrt{5}X - 11$. Le discriminant de f est $\Delta = (-\sqrt{5})^2 - 4 \times 1 \times (-11) = 49 > 0$ donc f a deux racines réelles :

$$X_1 = \frac{-(-\sqrt{5}) - \sqrt{49}}{2 \times 1} = \frac{\sqrt{5} - 7}{2} \qquad \text{et} \qquad X_2 = \frac{-(-\sqrt{5}) + \sqrt{49}}{2 \times 1} = \frac{\sqrt{5} + 7}{2}.$$

Ainsi, comme $a = 1 > 0$, $f(X) < 0$ si et seulement si $X \in \left]\frac{\sqrt{5}-7}{2} ; \frac{\sqrt{5}+7}{2}\right[$. Il s'ensuit que

$$(I_3) \Leftrightarrow \frac{\sqrt{5} - 7}{2} < X < \frac{\sqrt{5} + 7}{2} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{5} - 7}{2} < x^2 < \frac{\sqrt{5} + 7}{2}.$$

Remarquons que $\frac{\sqrt{5}-7}{2} < 0$ donc, pour tout réel x, $x^2 > \frac{\sqrt{5}-7}{2}$ donc

$$(I_3) \Leftrightarrow x^2 < \frac{\sqrt{5} + 7}{2} \Leftrightarrow -\sqrt{\frac{\sqrt{5} + 7}{2}} < x < \sqrt{\frac{\sqrt{5} + 7}{2}}.$$

Finalement, l'ensemble des solutions de (I_3) est $\left]-\sqrt{\frac{\sqrt{5}+7}{2}} ; \sqrt{\frac{\sqrt{5}+7}{2}}\right[$.