⧫ Chapitre 10. — La fonction exponentielle

I. — Définition

Théorème 1

Il existe une et une seule fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que

1. $f' = f$ i.e. pour tout réel x, $f'(x) = f(x)$;

2. $f(0) = 1$.

Démonstration. On admet l'existence d'une telle fonction. Montrons l'unicité.

Supposons que f soit une fonction vérifiant les propriétés du théorème 1.

Étape 1 : Montrons que la fonction f ne s'annule pas i.e. que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) \neq 0$.

Considérons la fonction $\varphi : x \mapsto f(x)f(-x)$. Alors, φ est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme produit de deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$: la fonction f et la fonction $x \mapsto f(-x)$ qui est dérivable comme composée de la fonction affine $x \mapsto -x$ suivie de la fonction f. Ainsi, pour tout réel x,

$$\varphi'(x) = f'(x)f(-x) + f(x)[-f'(-x)] = f'(x)f(-x) - f(x)f'(-x) = f(x)f(-x) - f(x)f(-x) = 0.$$

On en déduit que φ est constante sur $\mathbb{R}$. De plus, $\varphi(0) = f(0)^2 = 1$ donc, pour tout réel x, $\varphi(x) = 1$.

Ainsi, pour tout réel x, $f(x)f(-x) = 1$ donc $f(x) \neq 0$.

Étape 2 : Montrons que f est unique.

Supposons qu'il existe une autre fonction g vérifiant les hypothèses du théorème 1. Posons alors $h = \frac{g}{f}$. Comme f ne s'annule pas, h est définie sur $\mathbb{R}$. De plus, comme f et g sont dérivables sur $\mathbb{R}$, h est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout réel x,

$$h'(x) = \frac{g'(x)f(x) - g(x)f'(x)}{f(x)^2} = \frac{g(x)f(x) - f(x)g(x)}{f(x)^2} = 0.$$

Ainsi, la fonction h est constante sur $\mathbb{R}$. De plus, $h(0) = \frac{g(0)}{f(0)} = \frac{1}{1} = 1$ donc, pour tout réel x, $h(x) = 1$ i.e. $\frac{g(x)}{f(x)} = 1$ soit $g(x) = f(x)$.

Ainsi, $f = g$ donc la fonction f est unique. □

Définition 2

L'unique fonction définie par le théorème 1 est appelée la fonction exponentielle. On la note exp.

Propriété 3

Il résulte de la définition et de la démonstration du théorème 1 que :

1. pour tout réel x, $\exp'(x) = \exp(x)$;

2. $\exp(0) = 1$;

3. pour tout réel x, $\exp(x) \neq 0$;

4. pour tout réel x, $\exp(x)\exp(-x) = 1$ i.e. $\exp(-x) = \frac{1}{\exp(x)}$.

II. — Relation fonctionnelle caractéristique

Théorème 4

Pour tous réels x et y, $\exp(x+y) = \exp(x)\exp(y)$.

Démonstration. Soit $y \in \mathbb{R}$. On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = \frac{1}{\exp(y)}\exp(x+y)$. Alors, g est définie sur $\mathbb{R}$ car $\exp(y) \neq 0$ et dérivable sur $\mathbb{R}$ comme quotient et composée de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$. De plus, pour tout réel x,

$$g'(x) = \frac{1}{\exp(y)} \times 1 \times \exp(x+y) = g(x)$$

et $g(0) = \frac{1}{\exp(y)}\exp(y) = 1$ donc, par le théorème 1, $g = \exp$. Ainsi, pour tout nombre réel x, $\frac{1}{\exp(y)}\exp(x+y) = \exp(x)$ i.e. $\exp(x+y) = \exp(x)\exp(y)$. Ceci vaut pour tout réel y, ce qui démontre le théorème. □

Corollaire 5

Soit $a \in \mathbb{R}$. La suite (u_n) définie par : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \exp(na)$ est une suite géométrique de raison $\exp(a)$.

Démonstration. Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors, en appliquant le théorème précédent avec $x = na$ et $y = a$, il vient

$$u_{n+1} = \exp((n+1)a) = \exp(na + a) = \exp(na)\exp(a) = u_n \times \exp(a) = \exp(a) \times u_n.$$

Ainsi, (u_n) est bien une suite géométrique de raison $\exp(a)$. □

III. — Le nombre e et la notation e^x

Propriété 6

Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $\exp(n) = \exp(1)^n$.

Démonstration. Considérons la suite (u_n) définie par : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \exp(n)$. En appliquant le corollaire 5 avec $a = 1$, on peut affirmer que (u_n) est une suite géométrique de raison $\exp(1)$. De plus, $u_0 = \exp(0) = 1$ donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 1 \times \exp(1)^n$ i.e. $\exp(n) = \exp(1)^n$.

On a donc montré la propriété pour tout entier positif ou nul. Soit à présent n un entier négatif. Alors, $-n$ est positif donc $\exp(-n) = \exp(1)^{-n} = \frac{1}{\exp(1)^n}$. Or, d'après le point **4.** de la propriété 3, $\exp(-n) = \frac{1}{\exp(n)}$. Ainsi, $\frac{1}{\exp(n)} = \frac{1}{\exp(1)^n}$ donc, par passage à l'inverse, $\exp(n) = \exp(1)^n$. La propriété est donc montrée pour tout $n \in \mathbb{Z}$. □

On voit que le nombre $\exp(1)$ joue un rôle particulier.

Notation 7. On note e le nombre $\exp(1)$ i.e. l'image de 1 par la fonction exponentielle.

Avec cette notation, la propriété précédente assure que, pour tout entier $n \in \mathbb{Z}$, $\exp(n) = e^n$.

Notation 8. — On convient d'étendre cette égalité en notant, pour tout réel x, e^x le nombre $\exp(x)$.

Remarque 9.

1. C'est le mathématicien suisse L. Euler qui introduit la notation e en 1728.
2. Le nombre $e = \exp(1)$ vaut environ 2,718.
3. Euler a démontré en 1737 que e est un nombre irrationnel i.e. qu'on ne peut pas écrire e comme le quotient de deux nombres entiers. Le mathématicien français Ch. Hermite a prouvé en 1873 que e est transcendant i.e. qu'il n'existe pas de polynôme à coefficients rationnels dont e soit une racine.

Propriété 10. — (Règles de calcul)

Pour tous réels x et y et tout entier k,

1) $\mathrm{e}^{x+y} = \mathrm{e}^x\mathrm{e}^y$; 2) $\dfrac{1}{\mathrm{e}^x} = \mathrm{e}^{-x}$; 3) $\dfrac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^y} = \mathrm{e}^{x-y}$;

4) $\mathrm{e}^{kx} = (\mathrm{e}^x)^k$; 5) $\dfrac{1}{\mathrm{e}^{kx}} = (\mathrm{e}^x)^{-k} = (\mathrm{e}^{-x})^k = \mathrm{e}^{-kx}$.

Démonstration. Soit x et y deux réels et k un entier.

1) D'après le théorème 4, $\mathrm{e}^{x+y} = \exp(x+y) = \exp(x)\exp(y) = \mathrm{e}^x\mathrm{e}^y$.

2) D'après le point **4.** de la propriété 3, $\mathrm{e}^{-x} = \exp(-x) = \frac{1}{\exp(x)} = \frac{1}{\mathrm{e}^x}$.

3) On déduit de 1) et 2) que

$$\frac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^y} = \mathrm{e}^x \times \frac{1}{\mathrm{e}^y} = \mathrm{e}^x \times \mathrm{e}^{-y} = \mathrm{e}^{x+(-y)} = \mathrm{e}^{x-y}.$$

4) En appliquant le corollaire 5 avec $a = x$, on peut affirmer que la suite (u_n) définie par : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \mathrm{e}^{nx}$ est géométrique de raison e^x. De plus, $u_0 = \exp(0) = 1$ donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = (\mathrm{e}^x)^n$. En particulier, pour $n = k$, $\mathrm{e}^{kx} = (\mathrm{e}^x)^k$.

5) On déduit de 2) et 4) que

$$\frac{1}{\mathrm{e}^{kx}} = \frac{1}{(\mathrm{e}^x)^k} = (\mathrm{e}^x)^{-k} = \mathrm{e}^{(-k)x} = \mathrm{e}^{-kx} = \mathrm{e}^{k(-x)} = \left(\mathrm{e}^{-x}\right)^k.$$

□

Exemple 11. — Soit $x \in \mathbb{R}$. Alors,

$$\frac{(\mathrm{e}^x)^2\mathrm{e}^{-5x+2}}{\mathrm{e}^{3x}\mathrm{e}^2} = \frac{\mathrm{e}^{2x}\mathrm{e}^{-5x+2}}{\mathrm{e}^{3x+2}} = \frac{\mathrm{e}^{2x-5x+2}}{\mathrm{e}^{3x+2}} = \frac{\mathrm{e}^{-3x+2}}{\mathrm{e}^{3x+2}} = \mathrm{e}^{-3x+2-(3x+2)} = \mathrm{e}^{-3x+2-3x-2} = \mathrm{e}^{-6x}.$$

Exercice 12. Soit $x \in \mathbb{R}$. Démontrer que $\dfrac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}} = \dfrac{\mathrm{e}^{2x}-1}{\mathrm{e}^{2x}+1}$.

Solution. On a

$$\frac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}} = \frac{\mathrm{e}^x - \frac{1}{\mathrm{e}^x}}{\mathrm{e}^x + \frac{1}{\mathrm{e}^x}} = \frac{\frac{\mathrm{e}^x\times\mathrm{e}^x-1}{\mathrm{e}^x}}{\frac{\mathrm{e}^x\times\mathrm{e}^x+1}{\mathrm{e}^x}} = \frac{\frac{\mathrm{e}^{2x}-1}{\mathrm{e}^x}}{\frac{\mathrm{e}^{2x}+1}{\mathrm{e}^x}} = \frac{\mathrm{e}^{2x}-1}{\mathrm{e}^x} \times \frac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^{2x}+1} = \frac{\mathrm{e}^{2x}-1}{\mathrm{e}^{2x}+1}.$$

Autre méthode. On peut aussi obtenir l'égalité voulue en multipliant numérateur et dénominateur par e^x :

$$\frac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}} = \frac{(\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}) \times \mathrm{e}^x}{(\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}) \times \mathrm{e}^x} = \frac{\mathrm{e}^x \times \mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x} \times \mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x \times \mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x} \times \mathrm{e}^x} = \frac{\mathrm{e}^{2x}-1}{\mathrm{e}^{2x}+1}.$$

IV. — Etude de la fonction expontentielle

1) Signe

Propriété 13

Pour tout réel x, $\mathrm{e}^x > 0$.

Démonstration. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\mathrm{e}^x = \mathrm{e}^{\frac{x}{2}+\frac{x}{2}} = \left(\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}\right)^2 \geqslant 0$. De plus, la fonction exp ne s'annule pas donc, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\mathrm{e}^x > 0$. □

2) Variations

Propriété 14

La fonction exp est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Démonstration. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\exp'(x) = \mathrm{e}^x > 0$ donc exp est strictement croissante sur $\mathbb{R}$. □

Corollaire 15

Pour tous réels a et b,

1. $\mathrm{e}^a = \mathrm{e}^b$ si et seulement si $a = b$;

2. $\mathrm{e}^a < \mathrm{e}^b$ si et seulement si $a < b$;

3. $\mathrm{e}^a \leqslant \mathrm{e}^b$ si et seulement si $a \leqslant b$;

Exercice 16. — Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations et inéquations suivantes.

$$(E_1)\ \mathrm{e}^x = 0 \qquad (E_2)\ \mathrm{e}^{x^2} = \mathrm{e}^x \qquad (I_1)\ \mathrm{e}^{2x} \leq -2 \qquad (I_2)\ \mathrm{e}^{x^2} > \exp(6-5x).$$

Solution. • $(E_1) \Leftrightarrow \mathrm{e}^x = \mathrm{e}^0 \Leftrightarrow x = 0$
Ainsi, l'ensemble des solutions de (E_1) est $\{0\}$.
• $(E_2) \Leftrightarrow \mathrm{e}^{x^2} = \mathrm{e}^x \Leftrightarrow x^2 = x \Leftrightarrow x^2 - x = 0 \Leftrightarrow x(x-1) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ou $x = 1$.
Ainsi, l'ensemble des solutions de (E_2) est $\{0, 1\}$.
• Pour tout réel x, $\mathrm{e}^x > 0$ donc l'ensemble des solutions de (I_1) est vide.
• $(I_2) \Leftrightarrow \mathrm{e}^{x^2} > \mathrm{e}^{6-5x} \Leftrightarrow x^2 > 6 - 5x \Leftrightarrow x^2 + 5x - 6 > 0$
Le trinôme $x^2 + 5x - 6$ admet 1 comme racine évidente (car la somme de ces coefficients est nulle). L'autre racine est -6 car $-6 \times 1 = -6$. Comme $a = 1 > 0$, on en déduit que $x^2 + 5x - 6 > 0$ si et seulement si $x \in]-\infty\,;-6[\,\cup\,]1\,;+\infty[$. Ainsi, l'ensemble des solutions de (I_2) est $]-\infty\,;-6[\,\cup\,]1\,;+\infty[$.

3) Tangente au point d'abscisse 0

Propriété 17

Notons $\mathcal{C}$ la courbe de la fonction exponentielle. La tangente T à $\mathcal{C}$ au point d'abscisse 0 a pour équation $y = x + 1$.

Démonstration. Par théorème, T a pour équation $y = \exp'(0)(x-0) + exp(0)$. Or, $\exp'(0) = \exp(0) = 1$ donc T a pour équation $y = 1(x-0) + 1 = x + 1$. □

Propriété 18

Pour tout réel x, $\mathrm{e}^x \geqslant x+1$.

Démonstration. Considérons la fonction $f : x \mapsto \mathrm{e}^x - (x+1)$ définie sur $\mathbb{R}$. Alors, f est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme différence de fonctions dérivables et, pour tout réel x, $f'(x) = \mathrm{e}^x - 1$. Ainsi,

$$f'(x) \geqslant 0 \Leftrightarrow \mathrm{e}^x - 1 \geqslant 0 \Leftrightarrow \mathrm{e}^x \geqslant 1 \Leftrightarrow \mathrm{e}^x \geqslant \mathrm{e}^0 \Leftrightarrow x \geqslant 0.$$

Ainsi, $f'(x) \geqslant 0$ si $x \geqslant 0$ et $f'(x) \leqslant 0$ si $x \leqslant 0$. On en déduit que f est décroissante sur $]-\infty\,;0]$ et croissante sur $[0\,;+\infty[$. En particulier, f admet un minimum en 0. Ainsi, pour tout réel x, $f(x) \geqslant f(0)$. Or, $f(0) = \mathrm{e}^0 - (0+1) = 1 - 1 = 0$ donc, pour tout réel x, $f(x) \geqslant 0$ i.e. $\mathrm{e}^x - (x+1) \geqslant 0$ soit $\mathrm{e}^x \geqslant x+1$. □

Corollaire 19

La courbe $\mathcal{C}$ de la fonction exponentielle est au-dessus de sa tangente T au point d'abscisse 0.

Démonstration. D'après la propriété 17, T a pour équation $y = x+1$. Or, d'après la propriété 18, pour tout réel x, $\mathrm{e}^x \geqslant x+1$ donc la courbe de la fonction exponentielle se situe au-dessus de la droite T. □

4) Tableau de variation et courbe représentative

Le tableau de variation de la fonction exponentielle sur $\mathbb{R}$ est le suivant.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
Variations de exp	0 ↗	1 ↗	$+\infty$

La courbe de la fonction exponentielle est la suivante. On constate que exp croît très vite. On retrouve la notion de croissance exponentielle vue dans la chapitre sur les suites géométriques.