⧫ Chapitre 6 : Produit scalaire dans le plan

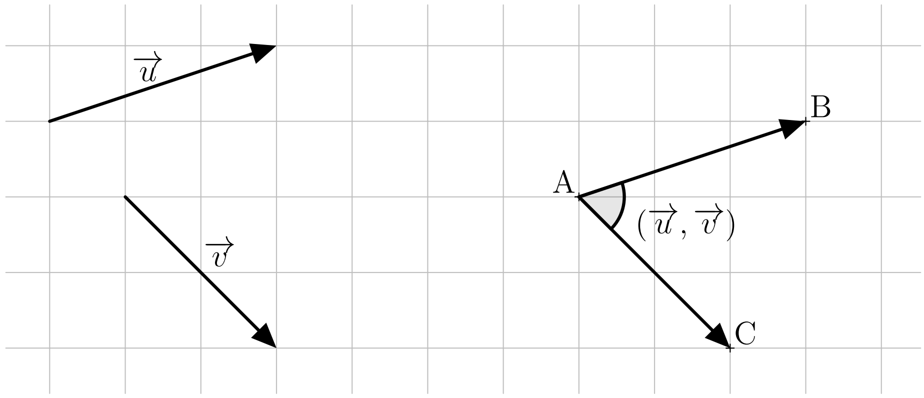
Dans tout le chapitre, on suppose qu'une unité de longueur est choisie. Toutes les longueurs et toutes les normes de vecteurs sont exprimées dans cette unité.

I. — Définitions

1) Angle formé par deux vecteurs non nuls

Dans tout ce qui suit, les angles sont mesurés en radians. On assimile un angle à une de ses mesures en radian ce qui permet de considérer le cosinus de n'importe quel angle. Ainsi, si $\widehat{\mathrm{ABC}}$ est un angle de 135° alors $\widehat{\mathrm{ABC}}$ mesure $\frac{3\pi}{4}$ radian et on écrit $\cos\left(\widehat{\mathrm{ABC}}\right) = \cos(\frac{3\pi}{4}) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

De plus, si $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont deux vecteurs non nuls, on note $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ « l'angle formé par $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ ». Plus précisément, si A, B et C sont trois points tels que $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{\mathrm{AB}}$ et $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{\mathrm{AC}}$ alors $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) = \widehat{\mathrm{BAC}}$.



2) Produit scalaire

Définition 1

Soit $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs du plan. On définit le produit scalaire de $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$, noté $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v}$, de la manière suivante :

1. si $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont tous les deux non nuls alors

$$\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = \|\overrightarrow{u}\| \times \|\overrightarrow{v}\| \times \cos(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$$

2. si au moins un des deux vecteurs $\overrightarrow{u}$ ou $\overrightarrow{v}$ est nul alors

$$\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = 0.$$

En particulier, si A, B et C sont trois points distincts du plan alors

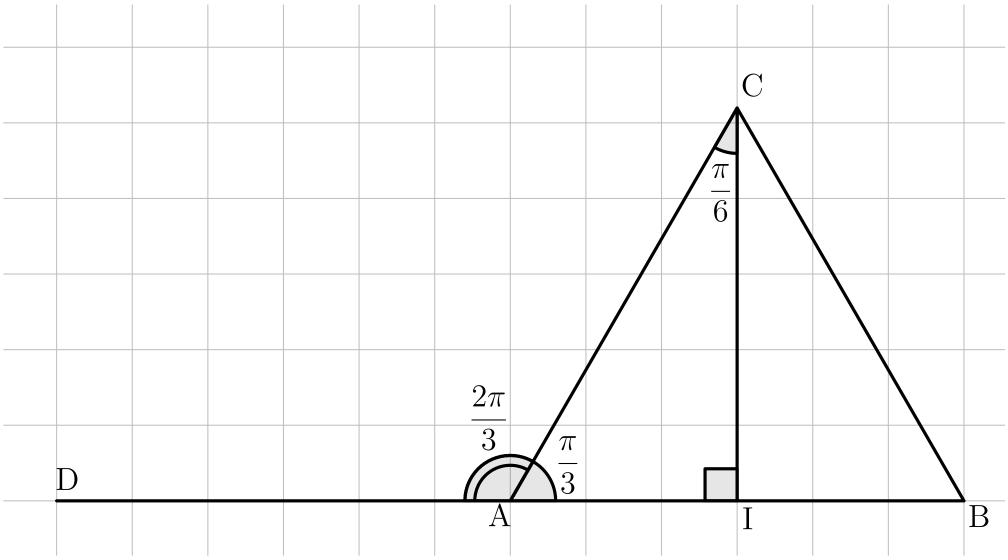
$$\overrightarrow{\mathrm{AB}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AC}} = \mathrm{AB} \times \mathrm{AC} \times \cos(\widehat{\mathrm{BAC}})$$

Remarque 2.

1. Le produit scalaire est une opération sur des vecteurs mais dont le résultat est un nombre réel.

2. ATTENTION. Dans la dernière égalité de la définition 1, il est indispensable que les deux vecteurs aient la même origine.

Exemple 3. Soit ABC un triangle équilatéral de côté 6. On note I le milieu de [AB].



Alors,

1. Comme ABC est équilatéral, $\widehat{\mathrm{BAC}} = \frac{\pi}{3}$ donc

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AC}} = \mathrm{AB} \times \mathrm{AC} \times \cos(\widehat{\mathrm{BAC}}) = 6 \times 6 \times \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = 36 \times \frac{1}{2} = 18$$

2. Comme ABC est équilatéral, la médiane (CI) est aussi la hauteur issue de C donc $\widehat{\mathrm{AIC}} = \frac{\pi}{2}$. Dès lors,

$$\overrightarrow{\mathrm{IA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{IC}} = \mathrm{IA} \times \mathrm{IC} \times \cos(\widehat{\mathrm{AIC}}) = \mathrm{IA} \times \mathrm{IC} \times \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = \mathrm{IA} \times \mathrm{IC} \times 0 = 0.$$

3. $\overrightarrow{\mathrm{CA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{CI}} = \mathrm{CA} \times \mathrm{CI} \times \cos(\widehat{\mathrm{ACI}})$. Or, comme ABC est équilatéral, on a :
   – d'une part, que (CI) est la bissectrice de l'angle $\widehat{\mathrm{ACB}}$ donc $\widehat{\mathrm{ACI}} = \frac{\pi}{6}$ et ainsi $\cos(\widehat{\mathrm{ACI}}) = \cos(\frac{\pi}{6}) = \frac{\sqrt{3}}{2}$
   – d'autre part, que AIC est rectangle en I donc $\cos(\widehat{\mathrm{ACI}}) = \frac{\mathrm{CI}}{\mathrm{CA}}$ et ainsi $\mathrm{CI} = \mathrm{CA}\cos(\widehat{\mathrm{ACI}}) = 6 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3}$. Ainsi, on obtient

$$\overrightarrow{\mathrm{CA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{CI}} = 6 \times 3\sqrt{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 9 \times \sqrt{3}^2 = 27.$$

4. Notons D le point tel que $\overrightarrow{\mathrm{BA}} = \overrightarrow{\mathrm{AD}}$. Alors,

$$\overrightarrow{\mathrm{BA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AC}} = \overrightarrow{\mathrm{AD}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AC}} = \mathrm{AD} \times \mathrm{AC} \times \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) = 6 \times 6 \times \left(-\frac{1}{2}\right) = -18.$$

Dans cet exemple, on a remplacé $\overrightarrow{\mathrm{BA}}$ par $\overrightarrow{\mathrm{AD}}$ afin d'obtenir le produit scalaire de deux vecteurs ayant la même origine.

Propriété 4

Soit $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs du plan. Alors,

1. $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = \overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{u}$ (le produit scalaire est symétrique) ;

2. $(-\overrightarrow{u}) \cdot \overrightarrow{v} = \overrightarrow{u} \cdot (-\overrightarrow{v}) = -(\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v})$.

3. $(-\overrightarrow{u}) \cdot (-\overrightarrow{v}) = \overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v}$.

Ainsi, en particulier si A, B et C sont trois points du plan, on a

$$\overrightarrow{\mathrm{BA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AC}} = -\overrightarrow{\mathrm{AB}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AC}} \qquad \text{et} \qquad \overrightarrow{\mathrm{BA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{CA}} = \overrightarrow{\mathrm{AB}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AC}}.$$

Démonstration. Si $\overrightarrow{u}$ ou $\overrightarrow{v}$ est nul, tous les produits scalaires considérés sont nuls donc les égalités sont vraies. Supposons à présente que ni $\overrightarrow{u}$ ni $\overrightarrow{v}$ n'est nul.

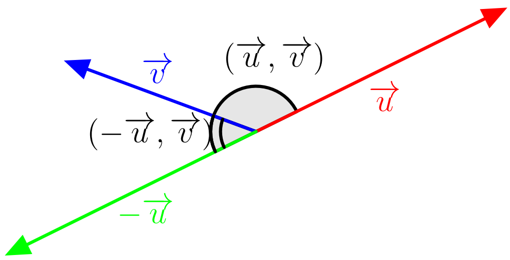
1. Comme l'angle géométrique $(\vec{u}, \overrightarrow{v})$ est égal à l'angle géométrique $(\overrightarrow{v}, \overrightarrow{u})$, on a

$$\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = \|\overrightarrow{u}\| \times \|\overrightarrow{v}\| \times \cos(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) = \|\overrightarrow{v}\| \times \|\overrightarrow{u}\| \times \cos(\overrightarrow{v}, \overrightarrow{u}) = \overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{u}.$$

2. Par définition, comme $\|-\overrightarrow{u}\| = \|\overrightarrow{u}\|$,

$$(-\overrightarrow{u}) \cdot \overrightarrow{v} = \|-\overrightarrow{u}\| \times \|\overrightarrow{v}\| \times \cos(-\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) = \|\overrightarrow{u}\| \times \|\overrightarrow{v}\| \times \cos(-\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}).$$

Or, comme $\overrightarrow{u}$ et $-\overrightarrow{u}$ sont colinéaires de sens contraires, ils forment un angle plat et donc $(-\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) = \pi - (\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$:



Étant donné que $\cos(-\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) = \cos(\pi - (\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})) = -\cos(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$, on en déduit que

$$(-\overrightarrow{u}) \cdot \overrightarrow{v} = \|\overrightarrow{u}\| \times \|\overrightarrow{v}\| \times \cos(\overrightarrow{-u}, \overrightarrow{v}) = -\|\overrightarrow{u}\| \times \|\overrightarrow{v}\| \times \cos(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) = -(\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v}).$$

La seconde égalité s'en déduit par symétrie :

$$\overrightarrow{u} \cdot (-\overrightarrow{v}) = (-\overrightarrow{v}) \cdot \overrightarrow{u} = -(\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{u}) = -(\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v}).$$

3. En utilisant deux fois ce qui précède,

$$(-\overrightarrow{u}) \cdot (-\overrightarrow{v}) = -(\overrightarrow{u} \cdot (-\overrightarrow{v})) = -(-(\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v})) = \overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v}.$$

□

Exemple 5. On reprend la configuration de l'exemple 3. On avait vu que $\overrightarrow{\mathrm{AB}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AC}} = 18$. On en déduit que :

1. $\overrightarrow{\mathrm{AC}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AB}} = \overrightarrow{\mathrm{AB}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AC}} = 18$.

2. $\overrightarrow{\mathrm{BA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AC}} = -\overrightarrow{\mathrm{AB}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AC}} = -18$.

Propriété 6. — Cas particuliers importants

Soit $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs non nuls du plan.

1. Si $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont colinéaires de même sens alors $\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v} = \|\overrightarrow{u}\| \times \|\overrightarrow{v}\|$.
2. Si $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont colinéaires de sens contraire alors $\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v} = -\|\overrightarrow{u}\| \times \|\overrightarrow{v}\|$.

Démonstration.

1. Si $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont colinéaires de même sens alors $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) = 0$ donc, comme $\cos(0) = 1$, $\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v} = \|u\| \times \|\overrightarrow{v}\|$.
2. Si $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont colinéaires de sens contraire alors $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) = \pi$ donc, comme $\cos(\pi) = -1$, $\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v} = -\|u\| \times \|\overrightarrow{v}\|$.

□

Exemple 7. Reprenons la situation de l'exemple 3.

1. Comme $\overrightarrow{\mathrm{AI}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ sont colinéaires de même sens, $\overrightarrow{\mathrm{AI}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \mathrm{AI} \times \mathrm{AB} = 3 \times 6 = 18$.
2. Comme $\overrightarrow{\mathrm{AI}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{BA}}$ sont colinéaires de même sens contraire, $\overrightarrow{\mathrm{AI}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BA}} = -\mathrm{AI} \times \mathrm{BA} = -3 \times 6 = -18$.

Définition 8

Soit $\overrightarrow{u}$ un vecteur du plan. Le produit scalaire $\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{u}$ est appelé le carré scalaire de $\overrightarrow{u}$. On le note $\overrightarrow{u}^2$.

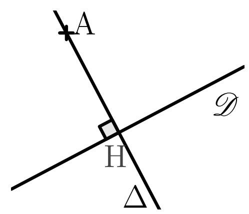
Remarque 9. D'après la propriété 6, pour tout vecteur $\overrightarrow{u}$, on a $\overrightarrow{u}^2 = \|\overrightarrow{u}\|^2$.

II. — Orthogonalité

1) Projection orthogonale

Définition 10

Soit $\mathscr{D}$ une droite du plan et A un point du plan. On note Δ la perpendiculaire à $\mathcal{D}$ passant par A et H le point d'intersection de $\mathscr{D}$ et de Δ.
Le point H est appelé le projeté orthogonal de A sur la droite $\mathscr{D}$.



Remarque 11. Si A appartient à la droite $\mathcal{D}$ alors H = A.

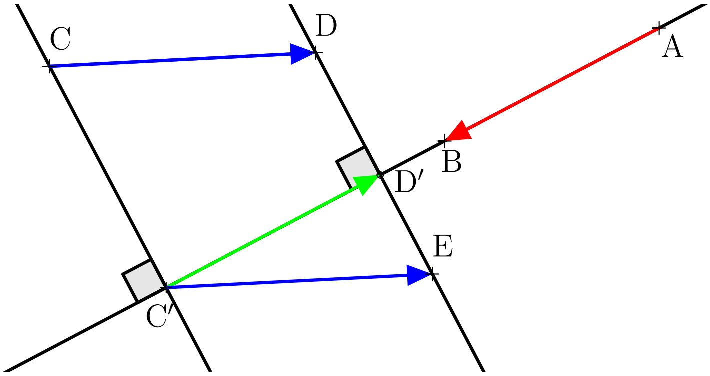
Propriété 12

Soit A, B, C et D des points du plan tels que $\mathrm{A} \neq \mathrm{B}$ et $\mathrm{C} \neq \mathrm{D}$. On note C′ et D′ les projetés orthogonaux respectifs de C et D sur (AB).

Alors, $\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CD}} = \overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{C'D'}}$.

En particulier, $\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}} = \overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC'}}$.

Démonstration. Considérons le point E tel que $\overrightarrow{\mathrm{C'E}} = \overrightarrow{\mathrm{CD}}$.



Si C n'appartient pas à la droite (AB) alors le quadrilatère C′EDC est un parallélogramme donc les droites (C′C) et (DE) sont parallèles. Or, la parallèle à (C′C) passant par D est (DD′) donc E $\in$ (DD′) et ainsi D′ est également le projeté orthogonal de E sur (AB).

Si C appartient à (AB) alors C' = C est le résultat en encore vrai.

Trois cas sont alors possibles :

1. Si C′ = D′ alors la droite (CD) est perpendiculaire à (AB) donc $(\overrightarrow{\mathrm{AB}}\,;\overrightarrow{\mathrm{CD}}) = \frac{\pi}{2}$ et donc $\overrightarrow{\mathrm{AB}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{CD}} = 0$. Mais, comme C′ = D′, $(\overrightarrow{\mathrm{AB}}\,;\overrightarrow{\mathrm{C'D'}}) = (\overrightarrow{\mathrm{AB}}\,;\overrightarrow{0}) = 0$ donc on a bien l'égalité voulue.

2. Soit (comme sur la figure ci-dessus), les vecteurs $\overrightarrow{\mathrm{C'D'}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ sont de sens contraires. Dans ce cas, d'après la propriété 6, $\overrightarrow{\mathrm{AB}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{C'D'}} = -\mathrm{AB} \times \mathrm{C'D'}$. Or, dans le triangle C′D′E rectangle en D′, $\cos(\widehat{\mathrm{EC'D'}}) = \frac{\mathrm{C'D'}}{\mathrm{C'E}}$ donc $\mathrm{C'D'} = \mathrm{C'E} \times \cos(\widehat{\mathrm{EC'D'}})$. Mais, comme $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{C'D'}}$ sont de sens contraire,

$$\cos(\widehat{\mathrm{EC'D'}}) = \cos\left(\overrightarrow{\mathrm{C'E}}, \overrightarrow{\mathrm{C'D'}}\right) = \cos\left(\pi - (\overrightarrow{\mathrm{C'E}}, \overrightarrow{\mathrm{AB}})\right) = -\cos\left(\overrightarrow{\mathrm{C'E}}, \overrightarrow{\mathrm{AB}}\right)$$

donc

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{C'D'}} = -\mathrm{AB} \times \mathrm{C'D'} = -\mathrm{AB} \times \mathrm{CE} \times \cos(\widehat{\mathrm{EC'D'}}) = \mathrm{AB} \times \mathrm{C'E} \times \cos\left(\overrightarrow{\mathrm{C'E}}, \overrightarrow{\mathrm{AB}}\right)$$

i.e. puisque comme $\overrightarrow{\mathrm{CD}} = \overrightarrow{\mathrm{C'E}}$,

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{C'D'}} = \mathrm{AB} \times \mathrm{CD} \times \cos\left(\overrightarrow{\mathrm{CE}}, \overrightarrow{\mathrm{AB}}\right) = \overrightarrow{\mathrm{AB}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{CD}}.$$

3. Soit les vecteurs $\overrightarrow{\mathrm{C'D'}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ sont de même sens. Dans ce cas, d'après la propriété 6, $\overrightarrow{\mathrm{AB}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{C'D'}} = \mathrm{AB} \times \mathrm{C'D'}$. Or, comme précédemment, $\mathrm{C'D'} = \mathrm{C'E} \times \cos(\widehat{\mathrm{EC'D'}})$ mais, puisque $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{C'D'}}$ sont de même sens,

$$\cos(\widehat{\mathrm{EC'D'}}) = \cos\left(\overrightarrow{\mathrm{C'E}}, \overrightarrow{\mathrm{C'D'}}\right) = \cos\left(\overrightarrow{\mathrm{C'E}}, \overrightarrow{\mathrm{AB}}\right)$$

et, comme précédemment, on conclut que

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{C'D'}} = \mathrm{AB} \times \mathrm{C'D'} = \mathrm{AB} \times \mathrm{C'E} \times \cos\left(\overrightarrow{\mathrm{C'E}}, \overrightarrow{\mathrm{AB}}\right) = \mathrm{AB} \times \mathrm{CD} \times \cos\left(\overrightarrow{\mathrm{CE}}, \overrightarrow{\mathrm{AB}}\right) = \overrightarrow{\mathrm{AB}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{CD}}.$$

Ainsi, l'égalité est établie dans tous les cas.

$\square$

Remarque 13. L'intérêt de la projection orthogonale réside dans le fait qu'on obtient des vecteurs colinéaires pour lesquels le calcul du produit scalaire est beaucoup plus simple en général.

Exemple 14. Reprenons la situation de l'exemple 3. Alors, I est le projeté orthogonal de C sur (AB) donc

1. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AI} = AB \times AI = 6 \times 3 = 18$.
2. $\overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{IC} = \overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{II} = \overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{0} = 0$.

2) Vecteurs orthogonaux

Définition 15

On dit que deux vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont orthogonaux si $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = 0$.
On note alors $\overrightarrow{u} \perp \overrightarrow{v}$

Remarque 16. Par définition du produit scalaire, le vecteur nul est orthogonal à tout vecteur $\overrightarrow{v}$.

Propriété 17

Soit A, B, C et D quatre points du plan tels que $A \neq B$ et $C \neq D$. Alors, (AB) et (CD) sont perpendiculaires si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont orthogonaux.

Démonstration. Par définition, $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = AB \times CD \times \cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD})$. Comme $A \neq B$ et $C \neq D$, $AB \neq 0$ et $CD \neq 0$. Dès lors, $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = 0$ si et seulement si $\cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}) = 0$ ce qui équivaut à dire que $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}) = \frac{\pi}{2}$. Or, l'angle $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD})$ est exactement l'angle entre les droites (AB) et (CD) et dire que cet angle vaut $\frac{\pi}{2}$ revient à dire que (AB) est perpendiculaire à (CD).

Ainsi, on a bien montré que $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{CD}$ si et seulement si (AB) et (CD) sont perpendiculaires. □

Remarque 18. Dans le plan, deux droites perpendiculaires sont aussi appelées droites orthogonales.

III. — Bilinéarité et conséquences

1) Bilinéarité du produit scalaire

Propriété 19. — (le produit scalaire est bilinéaire)

Soit $\overrightarrow{u_1}$, $\overrightarrow{u_2}$, $\overrightarrow{v_1}$ et $\overrightarrow{v_2}$ des vecteurs du plan et k et ℓ deux réels. Alors,

1. $(k\overrightarrow{u_1}) \cdot (\ell\overrightarrow{v_1}) = (k \times \ell)(\overrightarrow{u_1} \cdot \overrightarrow{v_1})$.
2. $\overrightarrow{u_1} \cdot (\overrightarrow{v_1} + \overrightarrow{v_2}) = \overrightarrow{u_1} \cdot \overrightarrow{v_1} + \overrightarrow{u_1} \cdot \overrightarrow{v_2}$.
3. $(\overrightarrow{u_1} + \overrightarrow{u_2}) \cdot (\overrightarrow{v_1} + \overrightarrow{v_2}) = \overrightarrow{u_1} \cdot \overrightarrow{v_1} + \overrightarrow{u_1} \cdot \overrightarrow{v_2} + \overrightarrow{u_2} \cdot \overrightarrow{v_1} + \overrightarrow{u_2} \cdot \overrightarrow{v_2}$.

Démonstration.

1. Si $k = 0$, $\ell = 0$, $\overrightarrow{u_1} = \overrightarrow{0}$ ou $\overrightarrow{v_1} = \overrightarrow{0}$, le résultat est clair car alors les deux membres sont nuls.
   Supposons que k, ℓ, $\overrightarrow{u_1}$ et $\overrightarrow{u_2}$ sont non nuls. Si $k > 0$, $k\overrightarrow{u_1}$ est un vecteur colinéaire et de même sens que u_1 donc $(k\overrightarrow{u_1}\,;\overrightarrow{v_1}) = (\overrightarrow{u_1}\,;\overrightarrow{v_1})$. Dès lors,
   $$(k\overrightarrow{u_1}) \cdot \overrightarrow{v_1} = \|k\overrightarrow{u_1}\| \times \|\overrightarrow{v_1}\| \times \cos(k\overrightarrow{u_1}\,;\overrightarrow{v_1}) = |k|\,\|\overrightarrow{u_1}\| \times \|\overrightarrow{v_1}\| \times \cos(\overrightarrow{u_1}\,;\overrightarrow{v_1}) = k(\overrightarrow{u_1} \cdot \overrightarrow{v_1})$$

car $|k| = k$.
Si $k < 0$, alors $k = -|k|$ donc, d'après la propriété 4 et d'après la premier cas,

$$(k\overrightarrow{u_1}) \cdot \overrightarrow{v_1} = (-|k|\,\overrightarrow{u_1}) \cdot \overrightarrow{v_1} = -((|k|\,\overrightarrow{u_1}) \cdot \overrightarrow{v_1}) = -|k|\,(\overrightarrow{u_1} \cdot \overrightarrow{v_1}) = k(\overrightarrow{u_1} \cdot \overrightarrow{v_1})$$

On en déduit par symétrie du produit scalaire que $\overrightarrow{u_1} \cdot (\ell\overrightarrow{v_1}) = \ell(\overrightarrow{u_1} \cdot \overrightarrow{v_1})$ et, en combinant ces deux résultats,

$$(k\overrightarrow{u_1}) \cdot (\ell\overrightarrow{v_1}) = k(\overrightarrow{u_1} \cdot (\ell\overrightarrow{v_1})) = (k\ell)(\overrightarrow{u_1} \cdot \overrightarrow{v_1}).$$

2. Si l'un des vecteurs u_1, v_1 ou v_2 est nul, l'égalité est évidente. Dans la suite, on suppose qu'aucun des vecteurs $\overrightarrow{u_1}$, $\overrightarrow{v_1}$ ou $\overrightarrow{v_2}$ n'est nul.
Si $\overrightarrow{v_1} + \overrightarrow{v_2} = \overrightarrow{0}$ alors $\overrightarrow{v_2} = -\overrightarrow{v_1}$ donc, d'après la propriété 4,

$$\overrightarrow{u_1} \cdot \overrightarrow{v_1} + \overrightarrow{u_1} \cdot \overrightarrow{v_2} = \overrightarrow{u_1} \cdot \overrightarrow{v_1} + \overrightarrow{u_1} \cdot (-\overrightarrow{v_1}) = \overrightarrow{u_1} \cdot \overrightarrow{v_1} - \overrightarrow{u_1} \cdot \overrightarrow{v_1} = 0 = \overrightarrow{u_1} \cdot \overrightarrow{0} = \overrightarrow{u_1} \cdot (\overrightarrow{v_1} + \overrightarrow{v_2})$$

Supposons à présent que $\overrightarrow{v_1} + \overrightarrow{v_2} \neq 0$.
Considérons des points A, B, C et D tels que $\overrightarrow{u_1} = \overrightarrow{\mathrm{AB}}$, $\overrightarrow{v_1} = \overrightarrow{\mathrm{AC}}$ et $\overrightarrow{v_2} = \overrightarrow{\mathrm{CD}}$. Alors, $\overrightarrow{v_1} + \overrightarrow{v_2} = \overrightarrow{\mathrm{AD}} \neq \overrightarrow{0}$. De plus, quitte à échanger les rôles de $\overrightarrow{v_1}$ et $\overrightarrow{v_2}$, on peut toujours supposer que $\mathrm{AC} > \mathrm{CD}$ (l'inégalité est stricte car $\overrightarrow{\mathrm{AD}} \neq \overrightarrow{0}$). Alors, $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ est du même sens que $\overrightarrow{\mathrm{AD}}$ (quel que soit le sens de $\overrightarrow{\mathrm{CD}}$)

a. Commençons par montrer le résultat dans le cas où les vecteurs sont tous colinéaires. Distinguons deux cas
<u>1^er^ cas.</u> — Supposons que $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{AD}}$ sont de même sens. Alors, $\overrightarrow{\mathrm{AB}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AD}} = \mathrm{AB} \times \mathrm{AD}$.
<u>1^er^ sous-cas.</u> — Si $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{CD}}$ sont de même sens alors ils sont du même sens que $\overrightarrow{\mathrm{AD}}$ et donc du même sens que $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$. Dans ce cas, on a $\mathrm{AD} = \mathrm{AC} + \mathrm{CD}$. De plus,

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AC}} + \overrightarrow{\mathrm{AB}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{CD}} = \mathrm{AB} \times \mathrm{AC} + \mathrm{AB} \times \mathrm{CD} = \mathrm{AB} \times (\mathrm{AC} + \mathrm{CD}) = \mathrm{AB} \times \mathrm{AD}$$

et donc $\overrightarrow{\mathrm{AB}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AD}} = \overrightarrow{\mathrm{AB}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AC}} + \overrightarrow{\mathrm{AB}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{CD}}$ i.e. $\overrightarrow{u_1} \cdot (\overrightarrow{v_1} + \overrightarrow{v_2}) = \overrightarrow{u_1} \cdot \overrightarrow{v_1} + \overrightarrow{u_1} \cdot \overrightarrow{v_2}$.
<u>2^e^ sous-cas.</u> — Si $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{CD}}$ ne sont pas de même sens alors $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ est du même sens contraire que $\overrightarrow{\mathrm{AD}}$ et donc du même sens que $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{CD}}$ est du sens contraire. Dans ce cas, on a $\mathrm{AD} = \mathrm{AC} - \mathrm{CD}$. De plus,

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AC}} + \overrightarrow{\mathrm{AB}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{CD}} = \mathrm{AB} \times \mathrm{AC} - \mathrm{AB} \times \mathrm{CD} = \mathrm{AB} \times (\mathrm{AC} - \mathrm{CD}) = \mathrm{AB} \times \mathrm{AD}$$

et on conclut comme dans le 1^er^ sous-cas.
<u>2^e^ cas.</u> — Supposons que $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{AD}}$ sont de sens contraire. Alors, $\overrightarrow{\mathrm{AB}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AD}} = -\mathrm{AB} \times \mathrm{AD}$.
<u>1^er^ sous-cas.</u> — Si $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{CD}}$ sont de même sens alors ils sont du même sens que $\overrightarrow{\mathrm{AD}}$ et donc du sens contraire de celui de $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$. Dans ce cas, on a $\mathrm{AD} = \mathrm{AC} + \mathrm{CD}$. De plus,

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AC}} + \overrightarrow{\mathrm{AB}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{CD}} = -\mathrm{AB} \times \mathrm{AC} - \mathrm{AB} \times \mathrm{CD} = -\mathrm{AB} \times (\mathrm{AC} + \mathrm{CD}) = -\mathrm{AB} \times \mathrm{AD}$$

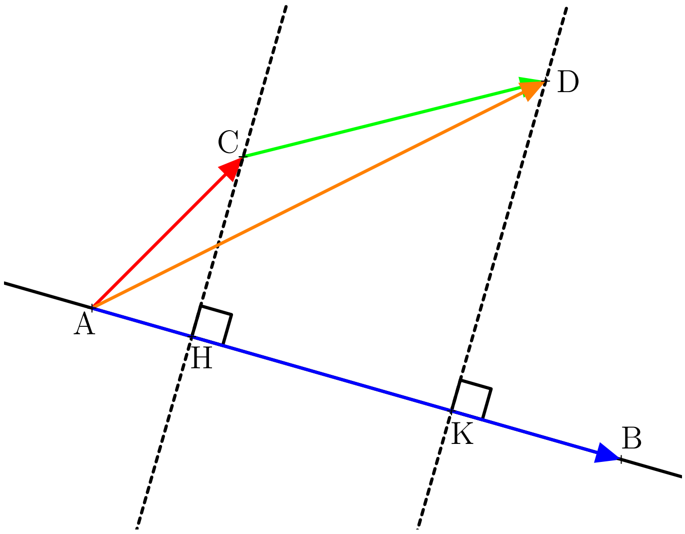
et donc $\overrightarrow{\mathrm{AB}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AD}} = \overrightarrow{\mathrm{AB}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AC}} + \overrightarrow{\mathrm{AB}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{CD}}$ i.e. $\overrightarrow{u_1} \cdot (\overrightarrow{v_1} + \overrightarrow{v_2}) = \overrightarrow{u_1} \cdot \overrightarrow{v_1} + \overrightarrow{u_1} \cdot \overrightarrow{v_2}$.
<u>2^e^ sous-cas.</u> — Si $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{CD}}$ ne sont pas de même sens alors $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ est du même sens contraire que $\overrightarrow{\mathrm{AD}}$ et donc du sens contraire de celui de $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{CD}}$ est du même sens que $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$. Dans ce cas, on a $\mathrm{AD} = \mathrm{AC} - \mathrm{CD}$. De plus,

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AC}} + \overrightarrow{\mathrm{AB}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{CD}} = -\mathrm{AB} \times \mathrm{AC} + \mathrm{AB} \times \mathrm{CD} = -\mathrm{AB} \times (\mathrm{AC} - \mathrm{CD}) = -\mathrm{AB} \times \mathrm{AD}$$

et on conclut comme dans le 1^er^ sous-cas.

Ainsi, si tous les vecteurs non colinéaires, le résultat est démontré dans tous les cas.

b. Dans le cas général, on se ramène au cas précédent par projection orthogonale. Notons H le projeté orthogonal de C sur (AB) et K le projeté orthogonal de D sur (AB).



Alors, d'après la propriété 12,

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AK}$$

et

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AH} + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{HK}.$$

Mais, comme les trois vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AH}$ et $\overrightarrow{HK}$ sont colinéaires, d'après **a.**,

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AH} + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{HK} = \overrightarrow{AB} \cdot \left(\overrightarrow{AH} + \overrightarrow{HK}\right) = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AK} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD}$$

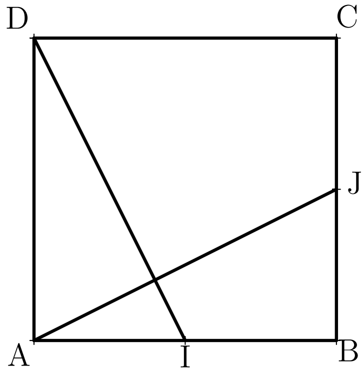
et, finalement, $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD}$ i.e. $\overrightarrow{u_1} \cdot (\overrightarrow{v_1} + \overrightarrow{v_2}) = \overrightarrow{u_1} \cdot \overrightarrow{v_1} + \overrightarrow{u_1} \cdot \overrightarrow{v_2}$.

3. En utilisant la symétrie du produit scalaire et le point **2.**, on obtient :

$$\begin{aligned}
(\overrightarrow{u_1} + \overrightarrow{u_2}) \cdot (\overrightarrow{v_1} + \overrightarrow{v_2}) &= (\overrightarrow{u_1} + \overrightarrow{u_2}) \cdot \overrightarrow{v_1} + (\overrightarrow{u_1} + \overrightarrow{u_2}) \cdot \overrightarrow{v_2} \\
&= \overrightarrow{v_1} \cdot (\overrightarrow{u_1} + \overrightarrow{u_2}) + \overrightarrow{v_2} \cdot (\overrightarrow{u_1} + \overrightarrow{u_2}) \\
&= \overrightarrow{v_1} \cdot \overrightarrow{u_1} + \overrightarrow{v_1} \cdot \overrightarrow{u_2} + \overrightarrow{v_2} \cdot \overrightarrow{u_1} + \overrightarrow{v_2} \cdot \overrightarrow{v_2} \\
&= \overrightarrow{u_1} \cdot \overrightarrow{v_1} + \overrightarrow{u_1} \cdot \overrightarrow{v_2} + \overrightarrow{u_2} \cdot \overrightarrow{v_1} + \overrightarrow{u_2} \cdot \overrightarrow{v_2}
\end{aligned}$$

□

Exemple 20. Soit ABCD un carré de côté a. On note I le milieu de [AB] et J le milieu de [BC]. Montrer que (AJ) $\perp$ (ID).



On va montrer que les vecteurs $\overrightarrow{\mathrm{AJ}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{ID}}$ sont orthogonaux. Par bilinéarité du produit scalaire,

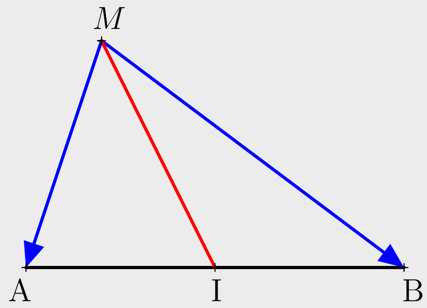
$$\overrightarrow{\mathrm{AJ}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{ID}} = \left(\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{BJ}}\right)\cdot\left(\overrightarrow{\mathrm{IA}}+\overrightarrow{\mathrm{AD}}\right) = \overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{IA}}+\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AD}}+\overrightarrow{\mathrm{BJ}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{IA}}+\overrightarrow{\mathrm{BJ}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AD}}$$

Or, $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{AI}}$ sont colinéaires de sens contraires donc $\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{IA}} = -\mathrm{AB}\times\mathrm{IA} = -a\times\frac{a}{2} = -\frac{a^2}{2}$, $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{AD}}$ sont orthogonaux donc $\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AD}} = 0$, $\overrightarrow{\mathrm{BJ}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{AI}}$ sont orthogonaux donc $\overrightarrow{\mathrm{BJ}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AI}} = 0$ et, enfin, $\overrightarrow{\mathrm{BJ}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{AD}}$ sont colinéaires de même sens donc $\overrightarrow{\mathrm{BJ}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AD}} = \mathrm{BJ}\times\mathrm{AD} = \frac{a}{2}\times = \frac{a^2}{2}$. Ainsi, $\overrightarrow{\mathrm{AJ}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{ID}} = -\frac{a^2}{2}+\frac{a^2}{2} = 0$ donc $\overrightarrow{\mathrm{AJ}}\perp\overrightarrow{\mathrm{ID}}$ ce qui permet de conclure que $(\mathrm{AJ})\perp(\mathrm{ID})$.

Propriété 21

Soit A et B deux points distincts du plan. On note I le milieu de [AB]. Alors, pour tout point M du plan,

$$\overrightarrow{M\mathrm{A}}\cdot\overrightarrow{M\mathrm{B}} = M\mathrm{I}^2 - \frac{1}{4}\mathrm{AB}^2.$$



Démonstration. Par bilinéarité et symétrie, et en utilisant le fait que $\overrightarrow{\mathrm{IA}} = -\overrightarrow{\mathrm{IB}}$

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{M\mathrm{A}}\cdot\overrightarrow{M\mathrm{B}} &= \left(\overrightarrow{M\mathrm{I}}+\overrightarrow{\mathrm{IA}}\right)\cdot\left(\overrightarrow{M\mathrm{I}}+\overrightarrow{\mathrm{IB}}\right)\\
&= \overrightarrow{M\mathrm{I}}^2+\overrightarrow{M\mathrm{I}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{IB}}+\overrightarrow{\mathrm{IA}}\cdot\overrightarrow{M\mathrm{I}}+\overrightarrow{\mathrm{IA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{IB}}\\
&= \overrightarrow{M\mathrm{I}}^2+\overrightarrow{M\mathrm{I}}\cdot\left(-\overrightarrow{\mathrm{IA}}\right)+\overrightarrow{M\mathrm{I}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{IA}}-\mathrm{IA}\times\mathrm{IB}\\
&= M\mathrm{I}^2-\overrightarrow{M\mathrm{I}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{IA}}+\overrightarrow{M\mathrm{I}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{IA}}-\frac{1}{2}\mathrm{AB}\times\frac{1}{2}\mathrm{AB}\\
&= M\mathrm{I}^2-\frac{1}{4}\mathrm{AB}^2
\end{aligned}$$

□

Corollaire 22

Soit A et B deux points du plan. L'ensemble $\mathcal{C}$ des points M du plan tels que $\overrightarrow{M\mathrm{A}}\cdot\overrightarrow{M\mathrm{B}} = 0$ est le cercle de diamètre [AB].

Démonstration. Soit I le milieu de [AB]. Alors, pour tout point M du plan, d'après la propriété précédente,

$$M\in\mathcal{C}\Leftrightarrow\overrightarrow{M\mathrm{A}}\cdot\overrightarrow{M\mathrm{B}} = 0\Leftrightarrow M\mathrm{I}^2-\frac{1}{4}\mathrm{AB}^2\Leftrightarrow M\mathrm{I}^2 = \frac{1}{4}\mathrm{AB}^2\Leftrightarrow \mathrm{I}M = \frac{1}{2}\mathrm{AB}$$

Ainsi, $\mathcal{C}$ est l'ensemble des points M tels que la distance $\mathrm{I}M$ est constant à égale à $\frac{1}{2}\mathrm{AB}$. Autrement dit, $\mathcal{C}$ est le cercle de centre I et de rayon $\frac{1}{2}\mathrm{AB}$ i.e. le cercle de diamètre [AB]. □

2) Identités remarquables et formule d'Al-Kashi

Propriété 23. — Identites remarquables pour le produit scalaire

Soit $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs du plan. Alors,

1. $\|\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}\|^2 = \|\overrightarrow{u}\|^2 + 2\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v} + \|\overrightarrow{v}\|^2$
2. $\|\overrightarrow{u}-\overrightarrow{v}\|^2 = \|\overrightarrow{u}\|^2 - 2\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v} + \|\overrightarrow{v}\|^2$
3. $(\overrightarrow{u}-\overrightarrow{v})\cdot(\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}) = \|\overrightarrow{u}\|^2 - \|\overrightarrow{v}\|^2$.

Démonstration. En utilisant la bilinéarité et la symétrie du produit scalaire,

1. $\|\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}\|^2 = (\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v})\cdot(\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}) = \overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{u}+\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}+\overrightarrow{v}\cdot\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}\cdot\overrightarrow{v} = \|u\|^2+2\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}+\|\overrightarrow{v}\|^2$
2. $\|\overrightarrow{u}-\overrightarrow{v}\|^2 = \|\overrightarrow{u}+(-\overrightarrow{v})\|^2 = \|u\|^2 + 2\overrightarrow{u}\cdot(-\overrightarrow{v}) + \|-\overrightarrow{v}\|^2 = \|u\|^2 - 2\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v} + \|\overrightarrow{v}\|^2$
3. $(\overrightarrow{u}-\overrightarrow{v})\cdot(\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}) = (\overrightarrow{u}+(-\overrightarrow{v}))\cdot(\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}) = \overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{u}+\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}+\overrightarrow{u}\cdot(-\overrightarrow{v})+\overrightarrow{v}\cdot\overrightarrow{v} = \|\overrightarrow{u}\|^2+\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}-\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}+\|\overrightarrow{v}\|^2 = \|\overrightarrow{u}\|^2-\|\overrightarrow{v}\|^2$.

□

On déduit des identités remarquables deux autres expressions du produit scalaire ne faisant intervenir que les normes.

Propriété 24. — Identites de polarisation

Soit $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs du plan. Alors,

1. $\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v} = \frac{1}{2}\left(\|\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}\|^2 - \|\overrightarrow{u}\|^2 - \|\overrightarrow{v}\|^2\right)$
2. $\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v} = \frac{1}{4}\left(\|\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}\|^2 - \|\overrightarrow{u}-\overrightarrow{v}\|^2\right)$

Démonstration.

1. D'après la première identité remarquable, $2\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v} = \|\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}\|^2 - \|\overrightarrow{u}\|^2 - \|\overrightarrow{v}\|^2$ et on obtient l'égalité voulue en divisant par 2.
2. En soustrayant la seconde identité remarquables à la première, il vient :

   $$\|\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}\|^2-\|\overrightarrow{u}-\overrightarrow{v}\|^2 = \|\overrightarrow{u}\|^2+2\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}+\|\overrightarrow{v}\|^2-\left(\|\overrightarrow{u}\|^2-2\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}+\|\overrightarrow{v}\|^2\right) = 4\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}$$

   et on obtient l'égalité voulue en divisant par 4.

□

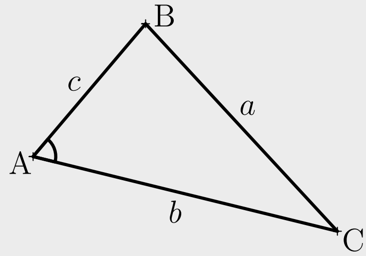
Exemple 25. Dans un triangle ABC, on sait que AB = 4, AC = 7 et BC = 8. Alors,

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC} &= \frac{1}{2}\left(\left\|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}\right\|^2 - \left\|\overrightarrow{AB}\right\|^2 - \left\|\overrightarrow{BC}\right\|^2\right)\\
&= \frac{1}{2}\left(\left\|\overrightarrow{AC}\right\|^2 - \left\|\overrightarrow{AB}\right\|^2 - \left\|\overrightarrow{BC}\right\|^2\right)\\
&= \frac{1}{2}\left(AC^2 - AB^2 - BC^2\right)\\
&= \frac{1}{2}(7^2-4^2-8^2) = -\frac{31}{2}
\end{aligned}$$

Propriété 26. — Formule d'Al-Kashi

Soit ABC un triangle. On note $a = \mathrm{BC}$, $b = \mathrm{AC}$ et $c = \mathrm{AB}$. Alors,

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos(\widehat{\mathrm{BAC}}).$$



Démonstration. On utilise la première identité remarquable :

$$\begin{aligned}
a^2 = \mathrm{BC}^2 = \left\|\overrightarrow{\mathrm{BC}}\right\|^2 \\
= \left\|\overrightarrow{\mathrm{BA}} + \overrightarrow{\mathrm{AC}}\right\|^2 \\
= \left\|\overrightarrow{\mathrm{BA}}\right\|^2 + \left\|\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right\|^2 + 2\overrightarrow{\mathrm{BA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AC}} \\
= BA^2 + AC^2 - 2\overrightarrow{\mathrm{AB}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AC}} \\
= c^2 + b^2 - 2 \times \mathrm{AB} \times \mathrm{AC} \times \cos(\widehat{\mathrm{BAC}}) \\
= b^2 + c^2 - 2bc\cos(\widehat{\mathrm{BAC}}).
\end{aligned}$$

□

Remarque 27. La formule d'Al-Kashi est une généralisation du théorème de Pythagore. En effet, si l'angle $\widehat{\mathrm{BAC}}$ est droit c'est-à-dire si ABC est rectangle en A, on retrouve l'égalité $\mathrm{BC}^2 = \mathrm{BA}^2 + \mathrm{AC}^2$.

Exemple 28. Soit ABC un triangle tel que $\mathrm{AB} = 4$, $\mathrm{AC} = 6$ et $\widehat{\mathrm{BAC}} = 60°$.

D'après la formule d'Al-Kashi,

$$\begin{aligned}
\mathrm{BC}^2 &= \mathrm{AB}^2 + \mathrm{AC}^2 - 2 \times \mathrm{AB} \times \mathrm{AC} \times \cos(\widehat{\mathrm{BAC}}) \\
&= 4^2 + 6^2 - 2 \times 4 \times 6 \times \cos(60°) \\
&= 16 + 36 - 48 \times \frac{1}{2} \\
&= 52 - 24 = 28
\end{aligned}$$

donc $\mathrm{BC} = \sqrt{28} = 2\sqrt{7}$.

3) Expression dans un repère orthonormé

Rappel. — Un repère du plan est la donnée de 3 points non alignés O, I et J. En posant $\overrightarrow{i} = \overrightarrow{\mathrm{OI}}$ et $\overrightarrow{j} = \overrightarrow{\mathrm{OJ}}$, ceci équivaut à se donner un point O et deux vecteurs non colinéaires $\overrightarrow{i}$ et $\overrightarrow{j}$. On dit alors que $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ est une base du plan.

Pour tout vecteur $\overrightarrow{u}$ du plan, il existe un unique couple $(x\,;y)$ de réels tels que $\overrightarrow{u} = x\overrightarrow{i} + y\overrightarrow{j}$. Ces nombres sont appelés les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{u}$ et on note $\overrightarrow{u}\,(x\,;y)$.

On dit qu'un repère $(\mathrm{O}, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ est orthogonal si les vecteurs $\overrightarrow{i}$ et $\overrightarrow{j}$ sont orthogonaux et que le repère et orthonormé (ou orthonormal) si, de plus, $\left\|\overrightarrow{i}\right\| = \left\|\overrightarrow{j}\right\| = 1$. Dans ce dernier cas, on dit que $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ est une base orthonormée du plan.

Si $(x\,;y)$ sont les coordonnées d'un vecteur dans un repère orthonormé du plan alors

$$\|\overrightarrow{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Propriété 29

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j})$. On considère deux vecteurs $\vec{u}\,(x\,;y)$ et $\vec{v}\,(x'\,;y')$ du plan. Alors,

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = xx' + yy'.$$

Démonstration. Par définition, $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j}$ et $\vec{v} = x'\vec{i} + y'\vec{j}$. Ainsi, par bilinéarité du produit scalaire,

$$\begin{aligned}\vec{u}\cdot\vec{v} &= (x\vec{i} + y\vec{j})\cdot(x'\vec{i} + y'\vec{j})\\ &= xx'\left\|\vec{i}\right\|^2 + xy'\vec{i}\cdot\vec{j} + yx'\vec{j}\cdot\vec{i} + yy'\left\|\vec{j}\right\|^2\\ &= xx' + yy'\end{aligned}$$

car le repère est orthonormé donc $\left\|\vec{i}\right\| = \left\|\vec{j}\right\| = 1$ et $\vec{i}\cdot\vec{j} = \vec{j}\cdot\vec{i} = 0$. □

Exemple 30. On se place dans un repère orthonormé $(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j})$. On considère les points $\mathrm{A}\,(1\,;-2)$, $\mathrm{B}\,(7\,;3)$ et $\mathrm{C}\,(-4\,;4)$.

Montrer que le triangle ABC est rectangle en A.

On a $\overrightarrow{\mathrm{AB}}\,(7-1\,;3-(-2))$ i.e. $\overrightarrow{\mathrm{AB}}\,(6\,;5)$ et $\overrightarrow{\mathrm{AC}}\,(-4-1\,;4-(-2))$ i.e. $\overrightarrow{\mathrm{AC}}\,(-5\,;6)$ donc $\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}} = 6\times(-5) + 5\times 6 = -30 + 30 = 0$ donc $\overrightarrow{\mathrm{AB}} \perp \overrightarrow{\mathrm{AC}}$ et ainsi ABC est rectangle en A.