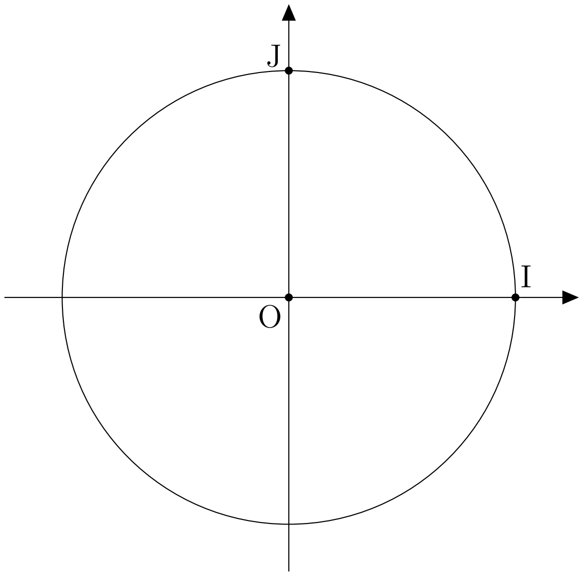
⧫ Chapitre 5. — Trigonométrie

Dans tout ce chapitre, le plan est muni d'un repère orthonormé (O, I, J).

I. — Le cercle trigonométrique

Définition 1

On appelle *cercle trigonométrique* le cercle de centre O et de rayon 1 orienté dans le sens inverse des aiguilles d'une montre. On dit alors que le cercle est orienté dans le sens direct (ou sens trigonométrique). Le sens contraire est appelé le sens indirect (ou sens rétrograde).



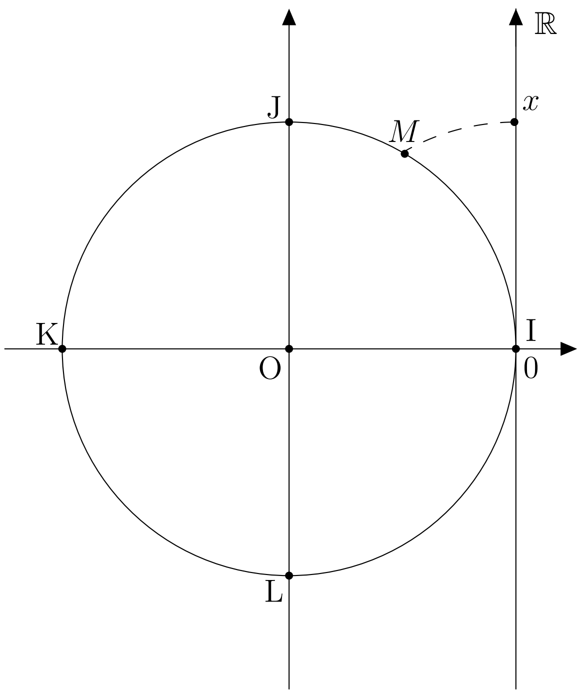
Remarque 2. Quand les points I et J sont disposés comme sur la figure ci-contre, le sens direct est le sens faisant passer de I à J par le plus court chemin. Dans ce cas, on dit que le repère (O, I, J) est direct.

Remarque 3. Comme le rayon du cercle trigonométrique est 1, son périmètre est $2 \times \pi \times 1$ c'est-à-dire 2π. Ainsi, un tour complet de ce cercle correspond à une longueur de 2π et donc un demi-tour à une longueur de π et un quart de tour à une longueur de $\dfrac{\pi}{2}$.

II. — Image d'un réel sur le cercle trigonométrique

On sait que l'ensemble des nombres réels peut être représenté graphiquement par une droite. Imaginons qu'on « colle » cette droite au cercle trigonométrique de telle façon qu'elle soit perpendiculaire au (OI) et que le nombre 0 de l'axe réel se retrouve sur I.

On peut alors « enrouler » l'axe réel autour du cercle trigonométrique, les réels positifs étant enroulés dans le sens direct et les réels négatifs dans le sens indirect.



Définition 4

À tout réel x, on associe un unique point M sur le cercle trigonométrique par enroulement de l'axe réel autour de ce cercle. On dit alors que M est l'image de x sur le cercle.

Exemple 5. Le point I est l'image des réels ....

Le point J est l'image des réels ....

Le point K est l'image des réels ....

Le point J est l'image des réels ....

Propriété 6

Soit x et y deux nombres réels. Alors, x et y ont la même image sur le cercle trigonométrique si et seulement s'il existe un entier relatif k tel que $y - x = 2k\pi$. On dit alors que x et y sont égaux modulo 2π et on note $x = y\ [2\pi]$.

Exercice 7. — Dans chacun des cas suivants, dire si les nombres x et y ont la même image sur le cercle trigonométrique.

$$\text{a) } x = \frac{\pi}{2},\ y = -\frac{3\pi}{2} \qquad \text{b) } x = \frac{2\pi}{3},\ y = -\frac{\pi}{3} \qquad \text{c) } x = -\frac{5\pi}{12},\ y = \frac{43\pi}{12}.$$

III. — Mesures d'un angle en radian

Définition 8

Soit M un point du cercle trigonométrique. Tout nombre x dont l'image sur le cercle est M est appelé une mesure en radian de l'angle $\widehat{IOM}$.

Remarque 9.

1. Le symbole du radian est rad.
2. Un même angle possède une infinité de mesures en radian différentes. En revanche, deux mesures en radian d'un même angle sont égales modulo 2π.
3. 1 radian correspond à la mesure de l'angle $\widehat{IOM}$ tel que l'arc $\widehat{IM}$ mesure 1 unité.
4. Pour convertir des radians en degré ou inversement, on utilise la proportionnalité à partir de l'égalité π rad $\leftrightarrow$ 180°.

Exemple 10. Donner une mesure en radian d'un angle mesurant
a) 30° b) 45° c) 60° d) 90° e) 120° f) 180° g) 270° h) 360°.

Définition 11

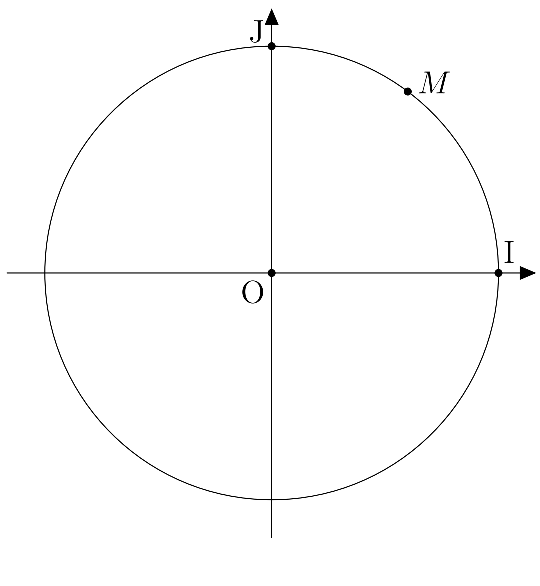
Parmi toutes les mesures en radian d'un angle α, celle qui appartient à l'intervalle $]-\pi\,;\pi]$ est appelée la mesure α.

Exemple 12. Si α mesure 270° alors une mesure en radian de α est $\frac{3\pi}{2}$. Cependant, ce n'est pas la mesure principale car $\frac{3\pi}{2} > \pi$. La mesure principale de α est $-\frac{\pi}{2}$ car $-\frac{\pi}{2} \in\ ]-\pi\,;\pi]$ et $\frac{3\pi}{2} = -\frac{\pi}{2}\ [\pi]$ (puisque $\frac{3\pi}{2} - (-\frac{\pi}{2}) = 2\pi$.)

IV. — Cosinus et sinus d'un réel

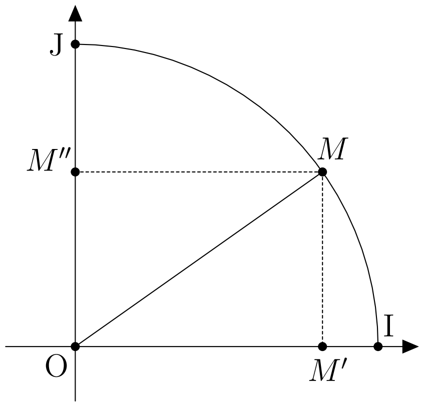
Définition 13

Soit x un nombre réel et M l'image de x sur le cercle trigonométrique. On définit le nombre $\cos(x)$ comme étant l'abscisse de M et le nombre $\sin(x)$ comme étant l'ordonnée de M. Autrement dit, les coordonnées de M sont $(\cos(x)\,;\sin(x))$.



Lien avec le cosinus et le sinus des angles vus au collège

Considérons un réel x strictement compris entre 0 et $\dfrac{\pi}{2}$. On note M l'image de x sur le cercle trigonométrique, M' le projeté orthogonal de M sur l'axe des abscisse et M'' le projeté orthogonal de M sur l'axe des ordonnées. Alors, par définition,



$$\cos\left(\widehat{\mathrm{IO}M}\right) =$$

$$\sin\left(\widehat{\mathrm{IO}M}\right) =$$

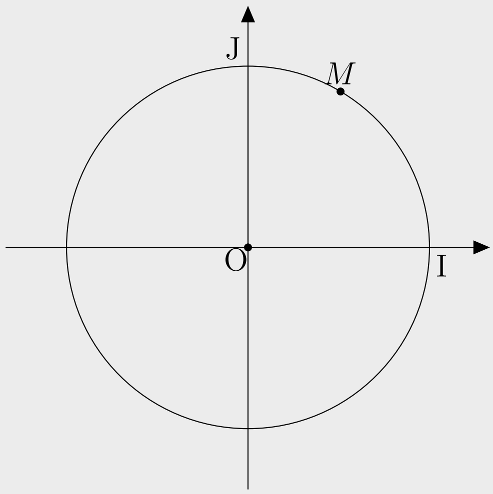
Valeurs remarquables à connaître

x	0	$\dfrac{\pi}{6}$	$\dfrac{\pi}{4}$	$\dfrac{\pi}{3}$	$\dfrac{\pi}{2}$
angle $\widehat{\mathrm{IO}M}$					
$\cos(x)$					
$\sin(x)$					

Propriété 14

Pour tout nombre réel x et tout entier relatif k,

1. $-1 \leqslant \cos x \leqslant 1$ et $-1 \leqslant \sin x \leqslant 1$;
2. $\cos(x + 2k\pi) = \cos x$ et $\sin(x + 2k\pi) = \sin x$;
3. $\cos(-x) = \cos x$ et $\sin(-x) = -\sin x$;
4. $\cos(x + \pi) = -\cos x$ et $\sin(x + \pi) = -\sin x$;
5. $\cos(\pi - x) = -\cos x$ et $\sin(\pi - x) = \sin x$;
6. $(\cos x)^2 + (\sin x)^2 = 1$ ce qui se note également $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$.



Exercice 15.

1. Déterminer les valeurs exactes des nombres suivants.

$$\cos\left(\frac{\pi}{4} + 2\pi\right) \qquad \cos\left(\frac{\pi}{3} + \pi\right) \qquad \sin\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) \qquad \sin\left(\frac{\pi}{3} - 7\pi\right) \qquad \cos\left(5\pi - \frac{\pi}{6}\right)$$

2. Calculer les valeurs exactes des nombres suivants.

$$\sin\left(\frac{8\pi}{3}\right) \qquad \sin\left(-\frac{7\pi}{6}\right) \qquad \cos(2016\pi) \qquad \cos\left(\frac{2017\pi}{2}\right) \qquad \sin\left(\frac{2016\pi}{3}\right).$$

3. Soit x un réel tel que $\cos(x) = -\dfrac{12}{13}$ et $x \in [-\pi\,;0]$. Déterminer $\sin(x)$.