♦ Chapitre 9. — Suites aritmétiques, suites géométriques

Dans tout ce chapitre, N désigne un entier naturel quelconque et les suites (u_n) considérées sont définies à partir du rang N, ce qu'on notera $(u_n)_{n \geqslant N}$.

I. — Suites arithmétiques

1) Définition et sens de variation

Définition 1

On dit qu'une suite $(u_n)_{n \geqslant N}$ est arithmétique s'il existe un réel r tel que, pour tout $n \geqslant N$, $u_{n+1} = u_n + r$. Dans ce cas, le nombre r est appelé la raison de la suite (u_n).

⚠ Le nombre réel r doit être indépendant de l'indice n de la suite. Par exemple, une suite définie par : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n + 2^n$ n'est pas arithmétique car le nombre 2^n dépend de l'indice n.

Exemple 2.

1. La suite (u_n) des entiers naturels définie par : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = n$ est arithmétique de raison 1 car, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = n + 1 = u_n + 1$.
2. Dans un tirelire, on place 50 euros. Puis, tous les mois, on met 10 euros dans la tirelire. Le nombre u_n d'euros dans la tirelire après n mois est une suite arithmétique de raison 10 car, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n + 10$.

Méthode 3 : Comment montrer qu'une suite est arithmétique

Pour montrer qu'une suite $(u_n)_{n \geqslant N}$ est arithmétique de raison r, il suffit de montrer que, pour tout $n \geqslant N$, $u_{n+1} - u_n = r$.

Attention, le résultat r doit être une constante indépendante de n.

Exemple 4. Considérons la suite (u_n) définie par : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = -5n + 7$. Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+1} - u_n = -5(n+1) + 7 - (-5n + 7) = -5n - 5 + 7 + 5n - 7 = -5$$

donc (u_n) est une suite arithmétique de raison -5.

Méthode 5 : Comment montrer qu'une suite n'est pas arithmétique

Pour montrer qu'une suite $(u_n)_{n \geqslant N}$ n'est pas arithmétique, il suffit de déterminer deux indices p et q supérieurs ou égaux à N tels que $u_{p+1} - u_p \neq u_{q+1} - u_q$.

Exemple 6. On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = n^2 + 1$. Alors, $u_0 = 0^2 + 1 = 1$, $u_1 = 1^1 + 1 = 2$ et $u_2 = 2^2 + 1 = 5$. Dès lors, $u_1 - u_0 = 2 - 1 = 1$ et $u_2 - u_1 = 5 - 2 = 3$ donc $u_2 - u_1 \neq u_1 - u_0$ ce qui suffit pour conclure que (u_n) n'est pas arithmétique.

> **Propriété 7**
>
> Soit $(u_n)_{n \geqslant N}$ une suite arithmétique de raison r.
>
> **1.** Si $r \geqslant 0$ alors la suite (u_n) est croissante.
>
> **2.** Si $r \leqslant 0$ alors la suite (u_n) est décroissante.

Démonstration. Pour tout $n \geqslant N$, $u_{n+1} = u_n + r$ donc $u_{n+1} - u_n = r$. Ainsi, le signe de $u_{n+1} - u_n$ est le signe de r donc (u_n) est croissante si $r \geqslant 0$ et (u_n) est décroissante si $r \leqslant 0$. □

Exemple 8.

1. Une suite arithmétique de raison -3 est décroissante.

2. Une suite arithmétique de raison 10^{-1} est croissante.

Remarque 9.

1. Dans la propriété précédente, si $r = 0$ alors (u_n) est constante et sinon les variations sont strictes.

2. Par définition, si (u_n) est une suite arithmétique alors l'accroissement $u_{n+1} - u_n$ est constant. On dit qu'une suite arithmétique a une variation linéaire. (Voir plus loin le lien avec les fonctions affines.)

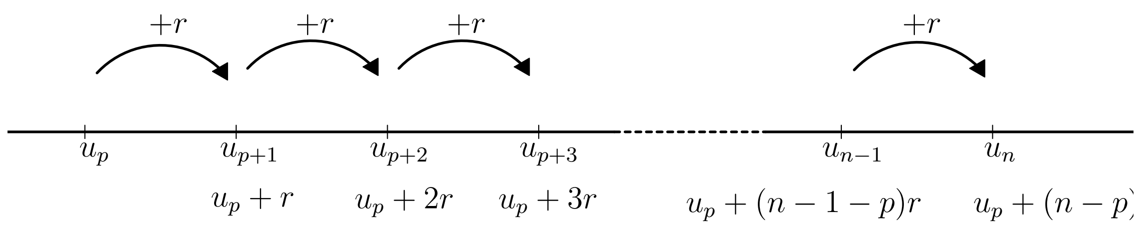
2) Forme explicite et et représentation graphique

> **Propriété 10**
>
> Soit $r \in \mathbb{R}$. Une suite $(u_n)_{n \geqslant N}$ est arithmétique de raison r si et seulement si pour tous entiers p et n supérieurs ou égaux à N,
>
> $$u_n = u_p + (n-p)r.$$

Démonstration.

Condition nécessaire. Supposons que (u_n) est arithmétique de raison r. Soit p et n deux entiers supérieurs ou égaux à N.

1^er^ cas. Supposons que $n \geqslant p$. Alors, l'évolution des termes de la suite (u_n) est décrite par le schéma suivant :



Ainsi, entre u_p et u_{p+1}, on ajoute r, entre u_p et u_{p+2}, on ajoute $2r$, entre u_p et u_{p+3}, on ajoute $3r$ et ainsi de suite. En remarquant que $u_n = u_{p+(n-p)}$, entre u_p et u_n, on ajoute exactement $n-p$ fois la raison r donc $u_n = u_p + (n-p)r$.

2e cas. Si $n < p$, en échangeant le rôle de n et p dans l'égalité ci-dessus, il vient $u_p = u_n + (p-n)r$ donc $u_n = u_p - (p-n)r = u_p + (n-p)r$. Ainsi, l'égalité est démontrée dans tous les cas.

Condition suffisante. Réciproquement, supposons que, pour tous entier p et n supérieurs ou égaux à N, $u_n = u_p + (n-p)r$. Soit un entier $p \geqslant N$ quelconque. Soit un entier $n \geqslant N$. Alors, par hypothèse, $u_n = u_p + (n-p)r$ et $u_{n+1} = u_p + (n+1-p)r$ donc

$$u_{n+1} = u_p + (n-p+1)r = u_p + (n-p)r + r = u_n + r$$

donc (u_n) est arithmétique de raison r. □

Remarque 11. Si (u_n) est une suite arithmétique de raison r définie sur $\mathbb{N}$, on peut prendre $p = 0$ et on obtient alors la formule explicite

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = u_0 + nr}.$$

Exemple 12.

1. Si (u_n) est la suite arithmétique de raison $r = 3$ et de premier terme $u_0 = 5$ alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 5 + 3n$.

2. Si (v_n) est la suite arithmétique de raison $r = -4$ et de premier terme $u_3 = 2$ alors, pour tout entier $n \geqslant 3$, $u_n = 2 + (n-3)(-4) = 14 - 4n$.

3. Si (w_n) est la suite définie par : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $w_n = -\frac{1}{3}n + 2$ alors (w_n) est la suite arithmétique de raison $-\frac{1}{3}$ et de premier terme $u_0 = 2$.

Exercice 13. Soit $(u_n)_{n \geqslant 5}$ une suite arithmétique telle que $u_{10} = 3$ et $u_{20} = 12$. Déterminer la raison et le premier terme de (u_n).

Solution. Notons r la raison de la suite (u_n). En appliquant la propriété 10 avec $p = 10$ et $n = 20$, il vient $12 = 3 + (20-10)r = 3 + 10r$ donc $r = \frac{12-3}{10}$ i.e. $\boxed{r = \frac{9}{10}}$. En appliquant la propriété 10 avec $p = 5$ et $n = 10$, il vient $u_5 = 3 + (5-10)\frac{9}{10} = 3 - \frac{9}{2}$ donc le premier terme de $(u_n)_{n \geqslant 5}$ est $\boxed{u_5 = -\frac{3}{2}}$.

Exercice 14. On considère la suite (u_n) définie par : $u_0 = 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \frac{u_n}{2u_n+1}$. On admet que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$.

1. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = \frac{1}{u_n}$. Montrer que (v_n) est une suite arithmétique dont on déterminera la raison et le premier terme.

2. Déterminer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'expression de v_n en fonction de n et en déduire celle de u_n.

Solution.

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors,

$$v_{n+1} - v_n = \frac{1}{u_{n+1}} - \frac{1}{u_n} = \frac{1}{\frac{u_n}{2u_n+1}} - \frac{1}{u_n} = \frac{2u_n+1}{u_n} - \frac{1}{u_n} = \frac{2u_n+1-1}{u_n} = \frac{2u_n}{u_n} = 2.$$

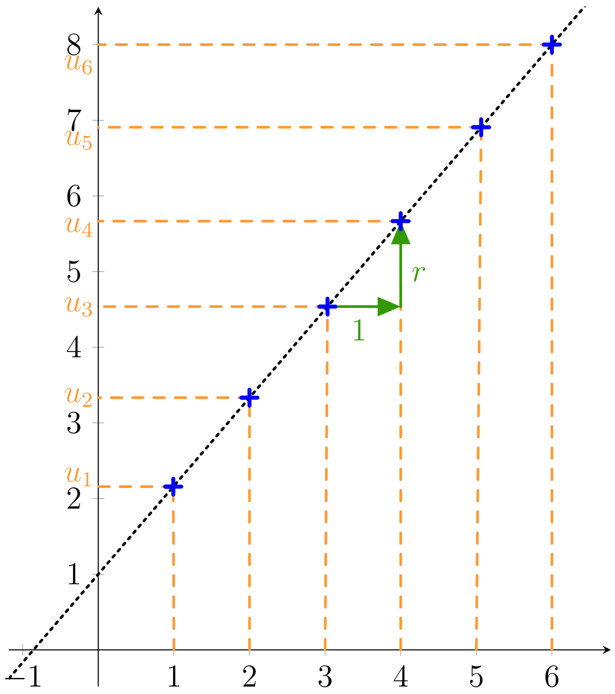
Ainsi, ‘uline(u_n) est une suite géométrique de raison 2. De plus, son premier terme est $v_0 = \frac{1}{u_0} = \frac{1}{1}$ i.e. $\boxed{v_0 = 1}$.

2. On déduit de la question précédente que, $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N},\ v_n = 1 + 2n}$. Or, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = \frac{1}{u_n}$ donc $u_n = \frac{1}{v_n}$. On conclut donc que, $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N},\ v_n = \frac{1}{2n+1}}$.

Propriété 15

Soit $(u_n)_{n\geqslant N}$ une suite arithmétique de raison r. Alors, le nuage de points représentant (u_n) est constitué de points alignés sur une droite dont le coefficient directeur est r.

Démonstration. Considérons un entier $p \geqslant N$. D'après la propriété 10, pour tout $n \geqslant N$, $u_n = u_p + (n-p)r$ i.e. $u_n = u_p - pr + nr$. Posons $b = u_p - pr$ et $f : x \mapsto rx + b$. Alors, pour tout $n \geqslant N$, $u_n = f(n)$. Or, f est une fonction affine dont le coefficient de x est r donc sa courbe représentative est une droite $\mathcal{D}$ de coefficient directeur r. Par définition, les points de coordonnées (n, u_n) appartiennent à $\mathcal{D}$ pour tout $n \geqslant N$ donc le nuage de points représentant (u_n) est constitué de points alignés sur $\mathcal{D}$. □



Remarque 16. Ainsi, les suites arithmétiques sont en quelques sorte l'équivalent pour les suites des fonctions affines.

3) Sommes de termes consécutifs

Propriété 17

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Démonstration. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Notons $S_n = 1 + 2 + 3 + \cdots + n$. Alors, en considérant les termes de la somme dans l'ordre inverse, on a aussi $S_n = n + (n-1) + (n-2) + \cdots + 1$. Ainsi,

$$S_n + S_n = (1 + 2 + 3 + \cdots + n) + (n + n - 1 + n - 2 + \cdots + 1)$$

En regroupant le terme de même couleur, il vient

$$2S_n = (1 + n) + (2 + n - 1) + (3 + n - 2) + \cdots + (n + 1).$$

Or, toutes les parenthèses valent $n + 1$ et il y a autant de parenthèses que de termes dans la somme de départ c'est-à-dire n. Ainsi, $2S_n = n \times (n+1)$ donc $S_n = \frac{n(n+1)}{2}$. □

Exemple 18. La somme des entiers naturels de 1 à 100 est égale à $\frac{100\times 101}{2} = 5050$.

Théorème 19. — Somme de termes consécutifs d'une suite arithmétique

Soit $(u_n)_{n\geqslant N}$ une suite arithmétique. Alors, pour tous entiers p et n tels que $n \geqslant p \geqslant N$,

$$u_p + u_{p+1} + u_{p+2} + \cdots + u_n = (n-p+1)\frac{u_p+u_n}{2}$$

Démonstration. Soit p et n des entiers tels que $n \geqslant p \geqslant N$. D'après la propriété 10, pour tout entier $k \geqslant 0$, $u_{p+k} = u_p + kr$ où r est la raison de (u_n). Dès lors,

$$u_p + u_{p+1} + u_{p+2} + \cdots + u_n = u_p + (u_p + r) + (u_p + 2r) + \cdots + (u_p + (n-p)r)$$

Dans cette somme, il y a $n-p+1$ fois le terme u_p et les autres termes sont des multiples de r donc on peut écrire :

$$u_p + u_{p+1} + u_{p+2} + \cdots + u_n = (n-p+1)u_p + (1+2+\cdots+n-p)r$$

Or, d'après la propriété 17, $1+2+\cdots+n-p = \frac{(n-p)(n-p+1)}{2}$ donc

$$\begin{aligned} u_p + u_{p+1} + u_{p+2} + \cdots + u_n &= (n-p+1)u_p \frac{(n-p)(n-p+1)}{2} r \\ &= (n-p+1)\frac{2u_p + (n-p)r}{2} \\ &= (n-p+1)\frac{u_p + (u_p + (n-p)r)}{2} \\ &= (n-p+1)\frac{u_p+u_n}{2} \end{aligned}$$

□

Remarque 20.

1. La formule précédente ne nécessite pas de connaître la raison de la suite mais seulement le premier terme, le dernier terme et le nombre de termes de la somme.
2. Un moyen mnémotechnique pour retenir la formule générale est : la somme de termes consécutifs d'une suite arithmétique est donnée par

$$(\text{nombre de termes}) \times \frac{1^{\text{er}}\text{ terme} + \text{dernier terme}}{2}.$$

   Attention cependant, de u_p à u_n, il y a $n-p+1$ termes et non pas $n-p$.

Exemple 21. Soit (u_n) une suite arithmétique telle que $u_5 = -3$ et $u_{15} = 13$. Alors,

$$u_5 + u_6 + u_7 + \cdots + u_{15} = (15-5+1)\frac{-3+13}{2} = 55.$$

II. — Suites géométriques

1) Définition

Définition 22

On dit qu'une suite $(u_n)_{n\geqslant N}$ est géométrique s'il existe un réel q tel que, pour tout $n \geqslant N$, $u_{n+1} = q \times u_n$. Dans ce cas, le nombre q est appelé la raison de la suite (u_n).

Comme pour les suites arithmétiques, la raison q ne doit pas dépendre de l'indice n. Par exemple, une suite définie par : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = (n+1) \times u_n$ n'est pas géométrique car le nombre $n+1$ dépend de l'indice n.

Exemple 23.

1. La suite (u_n) des puissances de 2 définie par : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 2^n$ est géométrique de raison 2 car, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 2^{n+1} = 2 \times 2^n = 2 \times u_n$.
2. Sur un compte en banque, il y a initialement 2000 euros. Ce compte rapporte 2% par an. Le nombre u_n d'euros sur le compte après n années est une suite géométrique de raison 1,02 car, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n + \frac{2}{100}u_n = (1 + 0{,}02)u_n = 1{,}02u_n$.

Méthode 24 : Comment montrer qu'une suite est géométrique

Pour montrer qu'une suite $(u_n)_{n\geqslant N}$ est géométrique de raison q, on transforme, pour tout $n \geqslant N$, u_{n+1} afin de de l'écrire sous la forme qu_n.

Attention, le résultat q doit être une constante indépendante de n.

Exemple 25. Considérons la suite (u_n) définie par : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 2(-3)^{n+2}$. Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+1} = 2(-3)^{n+3} = 2(-3)^{n+2+1} = (-3) \times 2(-3)^{n+2} = (-3)u_n$$

donc (u_n) est une suite géométrique de raison -3.

Méthode 26 : Comment montrer qu'une suite n'est pas géométrique

Pour montrer qu'une suite $(u_n)_{n\geqslant N}$ n'est pas géométrique, il suffit de déterminer deux indices p et q supérieurs ou égaux à N tels que $u_p \neq 0$, $u_q \neq 0$ et $\frac{u_{p+1}}{u_p} \neq \frac{u_{q+1}}{u_q}$.

Exemple 27. On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = n^2 + 1$. Alors, $u_0 = 0^2 + 1 = 1$, $u_1 = 1^1 + 1 = 2$ et $u_2 = 2^2 + 1 = 5$. Dès lors, $\frac{u_1}{u_0} = \frac{2}{1} = 2$ et $\frac{u_2}{u_1} = \frac{5}{2}$ donc $\frac{u_2}{u_1} \neq \frac{u_1}{u_0}$ ce qui suffit pour conclure que (u_n) n'est pas géométrique.

Remarque 28. Si $(u_n)_{n\geqslant N}$ est une suite géométrique de raison $q = 0$ alors, pour tout entier $n \geqslant N$, $u_{n+1} = 0 \times u_n = 0$ donc, sauf éventuellement le premier terme, tous les termes de la suite sont égaux à 0.

Ce cas n'ayant pas beaucoup d'intérêt, dans la suite, on supposera souvent $q \neq 0$ ce qui n'est pas très restrictif.

2) Forme explicite et sens de variation

Propriété 29

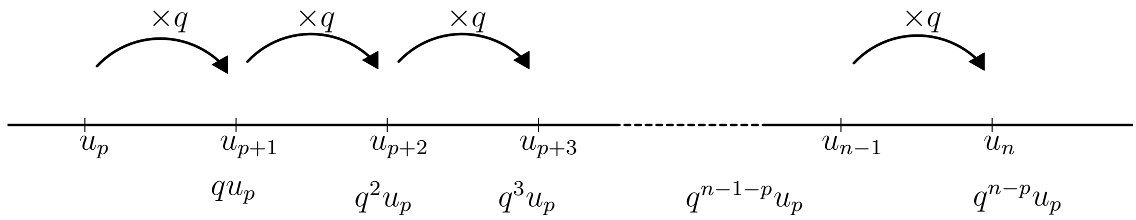
Soit $q \in \mathbb{R}^*$. Une suite $(u_n)_{n \geqslant N}$ est géométrique de raison q si et seulement si pour tous entiers p et n supérieurs ou égaux à N,

$$u_n = q^{n-p} u_p.$$

Démonstration.

Condition nécessaire. Supposons que (u_n) est géométrique de raison q. Soit p et n deux entiers supérieurs ou égaux à N.

1$^{\text{er}}$ cas. Supposons que $n \geqslant p$. Alors, l'évolution des termes de la suite (u_n) est décrite par le schéma suivant :



Ainsi, entre u_p et u_{p+1}, on multiplie par q, entre u_p et u_{p+2}, on multiplie par q^2, entre u_p et u_{p+3}, on multiplie par q^3 et ainsi de suite. En remarquant que $u_n = u_{p+(n-p)}$, entre u_p et u_n, on multiplie exactement $n-p$ fois par la raison q donc $u_n = q^{n-p} u_p$.

2$^{\text{e}}$ cas. Si $n < p$, en échangeant le rôle de n et p dans l'égalité ci-dessus, il vient $u_p = q^{p-n} u_n$ donc $u_n = \frac{1}{q^{p-n}} u_p = q^{-(p-n)} u_p = q^{n-p} u_p$. Ainsi, l'égalité est démontrée dans tous les cas.

Condition suffisante. Réciproquement, supposons que, pour tous entier p et n supérieurs ou égaux à N, $u_n = q^{n-p} u_p$. Soit un entier $p \geqslant N$ quelconque. Soit un entier $n \geqslant N$. Alors, par hypothèse, $u_n = q^{n-p} u_p$ et $u_{n+1} = q^{n+1-r} u_p$ donc

$$u_{n+1} = q^{n-r+1} u_p = q \times q^{n-p} u_p = q \times u_n$$

donc (u_n) est géométrique de raison q. □

Remarque 30. Si (u_n) est une suite géométrique de raison q définie sur $\mathbb{N}$, on peut prendre $p = 0$ et on obtient alors la formule explicite

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = u_0 q^n}.$$

Attention, cependant, si la suite (u_n) est définie seulement à partir du rang 1, on obtient la formule explicite

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n = u_1 q^{n-1}}.$$

Exemple 31.

1. Si (u_n) est la suite géométrique de raison $q = 3$ et de premier terme $u_0 = 5$ alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 5 \times 3^n$.
2. Si (v_n) est la suite géométrique de raison $q = -4$ et de premier terme $u_3 = 2$ alors, pour tout entier $n \geqslant 3$, $u_n = 2 \times (-4)^{n-3}$.
3. Si (w_n) est la suite définie par : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $w_n = 4(-\frac{1}{5})^n$ alors (w_n) est la suite géométrique de raison $-\frac{1}{5}$ et de premier terme $u_0 = 4$.

Exercice 32. Soit $(u_n)_{n\geqslant 5}$ une suite géométrique telle que $u_{10} = 3$ et $u_{12} = 48$. Quelle sont les valeurs possibles pour la raison q de (u_n) ?

Solution. En appliquant la propriété 29 avec $p = 10$ et $n = 12$, il vient $48 = 3 \times q^{12-10} = 3q^2$ donc $q^2 = \frac{48}{3} = 16$ donc $\boxed{q = 4 \text{ ou } q = -4}$.

Exercice 33. On place sur un compte rémunérer à 2% par an la somme de 2000 euros. Combien y a-t-il sur le compte après 10 ans ?

Solution. — Notons, pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n la somme (en euros) disponible sur le compte après n année. Comme on l'a déjà vu dans l'exemple 23, (u_n) est une suite géométrique de raison 1,02. Comme $u_0 = 2000$, on a donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 2000 \times 1{,}02^n$. Dès lors, $u_{10} = 2437{,}99$ donc, après dix années, il y aura 2437,99 euros sur le compte.

3) Sens de variation

Propriété 34

Soit $(u_n)_{n\geqslant N}$ une suite géométrique de raison $q \neq 0$ et de premier terme $u_N \neq 0$.

1. On suppose que $u_N > 0$ et $q > 0$. Alors, (u_n) est décroissante si $q \leqslant 1$ et croissante si $q \geqslant 1$.
2. On suppose que $u_N < 0$ et $q > 0$. Alors, (u_n) est croissante si $q \leqslant 1$ et décroissante si $q \geqslant 1$.
3. Si $q < 0$ alors la suite (u_n) n'est pas monotone.

Démonstration. Soit $n \geqslant N$. D'après la propriété 29, $u_n = q^{n-N} u_N$.

1. Comme $q > 0$ et $u_N > 0$ alors $u_n > 0$. Si $q \leqslant 1$ alors, en multipliant par u_n, il vient $qu_n \leqslant u_n$ i.e. $u_{n+1} \leqslant u_n$. Ainsi, (u_n) est décroissante.
   Si $q \geqslant 1$ alors, en multipliant par u_n, il vient $qu_n \geqslant u_n$ i.e. $u_{n+1} \geqslant u_n$. Ainsi, (u_n) est croissante.
2. Comme $q > 0$ et $u_N < 0$ alors $u_n < 0$. Si $q \leqslant 1$ alors, en multipliant par u_n, il vient $qu_n \geqslant u_n$ i.e. $u_{n+1} \geqslant u_n$. Ainsi, (u_n) est croissante.
   Si $q \geqslant 1$ alors, en multipliant par u_n, il vient $qu_n \leqslant u_n$ i.e. $u_{n+1} \leqslant u_n$. Ainsi, (u_n) est décroissante.
3. Comme $u_N \neq 0$ et $q \neq 0$, $u_n \neq 0$. Si $n - N$ est pair alors $q^{n-N} > 0$ donc u_n est du signe de u_N et si $n - N$ est impair alors $q^{n-N} < 0$ donc u_n est du signe contraire de celui de u_N. Ainsi, le signe de u_n alterne selon la valeur de n donc (u_n) n'est pas monotone.

□

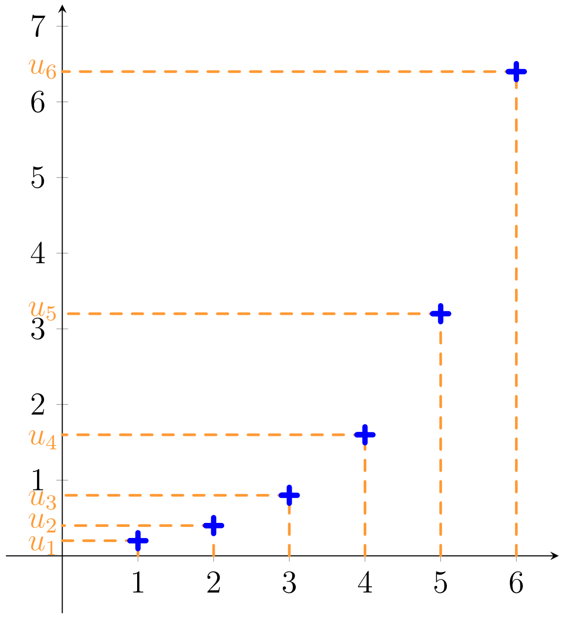
Exemple 35.

1. La suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$ et de premier terme 3 est décroissante.
2. La suite géométrique de raison 3 et de premier terme $\frac{1}{2}$ est croissante.

Remarque 36.

1. Dans la propriété précédente, si $q = 1$ alors (u_n) est constante et sinon les variations sont strictes.
2. Par définition, si (u_n) est une suite géométrique alors le taux d'évolution $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ est constant. On dit qu'une suite géométrique a une variation exponentielle. (Voir le chapitre sur la fonction exponentielle.)

Une variation exponentielle se caractérise notamment par une croissance très rapide si $q > 1$ et $u_N > 0$. Pour $q = 2$, $N = 1$ et $u_1 = 0{,}1$, on obtient le nuage de point suivant.



4) Sommes de termes consécutifs

Propriété 37

Soit $q \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$. On pose $S_n = 1 + q + q^2 + \cdots + q^n$.

1. Si $q \neq 1$ alors
$$S_n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}.$$

2. Si $q = 1$ alors $S_n = n + 1$.

Démonstration.

1. Remarquons que
$$qS_n = q(1 + q + q^2 + \cdots + q^n) = q + q^2 + q^3 + \cdots + q_n + q_{n+1} = S_n - 1 + q^{n+1}$$
donc $qS_n - S_n = q^{n+1} - 1$ i.e. $(q-1)S_n = q^{n+1} - 1$. Comme $q \neq 1$, $q - 1 \neq 0$ et donc, en divisant par $q - 1$, il vient
$$S_n = \frac{q^{n+1} - 1}{q - 1} = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}.$$

2. Si $q = 1$ alors, pour tout entier naturel k, $q^k = 1$ donc $S_n = \underbrace{1 + 1 + \cdots + 1}_{n+1 \text{ fois}} = n + 1$.

□

Exemple 38. La somme des puissances de 2 de 1 à 2^{10} est égale à $\frac{1-2^{11}}{1-2} = 2047$.

Théorème 39. — Somme de termes consécutifs d'une suite géométrique

Soit $(u_n)_{n\geqslant N}$ une suite géométrique de raison q. Soit p et n des entiers tels que $n \geqslant p \geqslant N$.

1. Si $q \neq 1$ alors
$$u_p + u_{p+1} + u_{p+2} + \cdots + u_n = u_p \frac{1-q^{n-p+1}}{1-q}.$$

2. Si $q = 1$ alors
$$u_p + u_{p+1} + u_{p+2} + \cdots + u_n = (n-p+1)u_p.$$

Démonstration. D'après la propriété 29, pour tout entier $k \geqslant 0$, $u_{p+k} = u_p q^k$. Dès lors,

$$\begin{aligned} u_p + u_{p+1} + u_{p+2} + \cdots + u_n &= u_p + u_p q + u_p q^2 + \cdots + u_p q^{n-p} \\ &= u_p(1 + q + q^2 + \cdots + q^{n-p}) \end{aligned}$$

On utilise ensuite la propriété 37.

1. Si $q \neq 1$ alors $1 + q + q^2 + \cdots + q^{n-p} = \frac{1-q^{n-p+1}}{1-q}$ donc
$$u_p + u_{p+1} + u_{p+2} + \cdots + u_n = u_p \frac{1-q^{n-p+1}}{1-q}.$$

2. Si $q = 1$ alors $1 + q + q^2 + \cdots + q^{n-p} = n-p+1$ donc
$$u_p + u_{p+1} + u_{p+2} + \cdots + u_n = u_p(n-p+1) = (n-p+1)u_p.$$

□

Remarque 40. Un moyen mnémotechnique pour retenir la formule générale est : la somme de termes consécutifs d'une suite géométrique de raison $q \neq 1$ est donnée par

$$(1^{\text{er}} \text{ terme}) \times \frac{1-q^{\text{nombre de termes}}}{1-q}.$$

Attention cependant, de u_p à u_n, il y a $n-p+1$ termes et non pas $n-p$.

Exemple 41. Soit (u_n) une suite géométrique de premier terme $u_0 = 5$ et de raison $q = \frac{1}{2}$. Alors,

$$u_3 + u_6 + u_7 + \cdots + u_{10} = 5 \times \frac{1-(\frac{1}{2})^{10-3+1}}{1-\frac{1}{2}} = u_3 \times \frac{1-\frac{1}{2^8}}{\frac{1}{2}} = u_3 \times \frac{2}{1} \times \left(1 - \frac{1}{256}\right) = 2u_3 \times \frac{255}{256}.$$

Or, $u_3 = u_0(\frac{1}{2})^3 = \frac{5}{8}$ donc

$$u_3 + u_6 + u_7 + \cdots + u_{10} = \frac{5}{4} \times \frac{255}{256} = \frac{1275}{1024}.$$