♦ Chapitre 3. — Généralités sur les suites réelles

I. — Définitions et exemples

Définition 1

Une suite réelle u est une fonction définie sur une partie A de $\mathbb{N}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$.

Exemple 2.

1. La suite des puissances de 2 est la suite $u : n \mapsto 2^n$ et elle est définie sur $A = \mathbb{N}$. Ainsi, $u(0) = 2^0$, $u(1) = 2^1 = 2$, $u(2) = 2^2 = 4$, $u(3) = 2^3 = 8$, ...
2. La suite des racines carrées des entiers naturels est la suite $v : n \mapsto \sqrt{n}$ et elle est définie sur $A = \mathbb{N}$. On a alors $v(0) = \sqrt{0} = 0$, $v(1) = \sqrt{1} = 1$, $v(2) = \sqrt{2}$, $v(3) = \sqrt{3}$, $v(4) = \sqrt{4} = 2$, ...
3. La suite des inverses des entiers naturels non nuls est la suite $t : n \mapsto \frac{1}{n}$ et elle est définie sur $A = \mathbb{N}^*$. On a alors $t(1) = \frac{1}{1} = 1$, $t(2) = \frac{1}{2} = 1$, $t(3) = \frac{1}{3}$, $t(4) = \frac{1}{4}$, ...

Formellement, une suite réelle est donc une fonction $u : A \to \mathbb{R}$ où $A \subset \mathbb{N}$. Dans la pratique, A sera le plus souvent $\mathbb{N}$ ou $\mathbb{N}^*$ mais ce n'est pas une obligation.

Concrètement, une suite réelle u peut être vue comme la donnée d'une liste ordonnée de nombres réels auxquels on a attribué un numéro. Supposons par exemple que $A = \mathbb{N}$. On peut alors voir la suite u ainsi :

$$u(0) \qquad u(1) \qquad u(2) \qquad u(3) \qquad u(4) \qquad \cdots \qquad u(n) \qquad \cdots$$

et cette liste continue indéfiniment.

Les différents nombres de la liste sont appelés les termes de la suite. L'entier n associé au terme $u(n)$ est appelé le rang de $u(n)$.

Il ne faut pas confondre le rang d'un terme avec sa place dans la suite.

$$\begin{array}{cccccccc}
\text{rang } 0 & \text{rang } 1 & \text{rang } 2 & \text{rang } 3 & \text{rang } 4 & \cdots & \text{rang } n & \cdots \\
\downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & & \downarrow & \\
u(0) & u(1) & u(2) & u(3) & u(4) & \cdots & u(n) & \cdots \\
\uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & & \uparrow & \\
1^{\text{er}} \text{ terme} & 2^{\text{e}} \text{ terme} & 3^{\text{e}} \text{ terme} & 4^{\text{e}} \text{ terme} & 5^{\text{e}} \text{ terme} & \cdots & (n+1)^{e} \text{ terme} & \cdots
\end{array}$$

Exemple 3. On considère la suite $u : n \mapsto 5 + \sqrt{n-3}$ définie sur $\mathbb{N} \setminus \{0, 1, 2\}$. Le premier terme de cette suite est $u(3) = 5 + \sqrt{3-3} = 5 + \sqrt{0} = 5$: c'est donc le terme de rang 3.

Notation 4. On considère une suite $u : A \to \mathbb{R}$ où $A \subset \mathbb{N}$.

1. Pour tout $n \in A$, le terme de rang n de la suite u se note $u(n)$ (« u de n ») ou u_n (« u indice n).
2. La suite u se note également $(u(n))_{n\in A}$ ou encore $(u_n)_{n\in A}$. Pour alléger les notations, on la notera également simplement $(u(n))$ ou (u_n).

Il ne faut pas confondre u_n qui désigne le terme de rang n de la suite (c'est donc une nombre) et (u_n) qui désigne la suite u (c'est donc une fonction ou – si on préfère – une liste de nombres).

Exemple 5. Les trois suites u, v et t définies dans l'exemple 2 peuvent respectivement s'écrire $(2^n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(\sqrt{n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(\frac{1}{n})_{n\in\mathbb{N}^*}$.

II. — Mode de génération d'une suite

Il existe différentes façons de définir concrètement (on dit aussi générer) une suite.

1) Par une expression explicite

On peut définir une suite par une expression explicite de u_n en fonction de n pour tout $n \in A$.

Il s'agit de la façon dont on a défini les suites dans les différents exemples précédents.

C'est la façon la plus simple et la plus directe de définir une suite. Elle permet en particulier de calculer n'importe quel terme de la suite.

Exemple 6. On considère la suite (u_n) définie, pour tout $n \in \mathbb{N}$, par $u_n = \frac{2^n-1}{2^n+1}$. Alors, on peut calculer directement u_4 :

$$u_4 = \frac{2^4-1}{2^4+1} = \frac{15}{17}.$$

2) Par une relation de récurrence

Une autre façon de définir une suite consiste à donner son premier terme et une relation permettant, connaissant un terme, de calculer le suivant. Une telle relation s'appelle une relation de récurrence.

C'est une façon un peu plus compliquée et surtout beaucoup moins directe de définir une suite. En particulier, pour déterminer un terme, il faut connaître le précédent.

Exemple 7. On considère la suite (u_n) définie par : $u_0 = 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, par $u_{n+1} = \frac{1}{u_n+2}$. Si on veut calculer u_4, il est nécessaire de calculer tous les termes précédents. On calcule donc successivement :

$$\begin{aligned}
u_1 = u_{0+1} &= \frac{1}{u_0+2} = \frac{1}{1+2} = \frac{1}{3} \\
u_2 = u_{1+1} &= \frac{1}{u_1+2} = \frac{1}{\frac{1}{3}+2} = \frac{1}{\frac{7}{3}} = \frac{3}{7} \\
u_3 = u_{2+1} &= \frac{1}{u_2+2} = \frac{1}{\frac{3}{7}+2} = \frac{1}{\frac{17}{7}} = \frac{7}{17} \\
u_4 = u_{3+1} &= \frac{1}{u_3+2} = \frac{1}{\frac{7}{17}+2} = \frac{1}{\frac{41}{17}} = \frac{17}{41}
\end{aligned}$$

Il ne faut pas pas confondre u_{n+1} et $u_n + 1$. Dans le premier cas, on ajoute 1 à n alors que, dans le second, on ajoute 1 à u_n.

3) Par un algorithme

On peut également définir une suite par un algorithme permettant de calculer le terme d'indice n.

Exemple 8. On considère l'algorithme suivant dans lequel N désigne un entier naturel.

$U \leftarrow 1$
Tant que $U < N$
    $U \leftarrow 2U$
Fin Tant que

On définit la suite (u_n) par : pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n est égal à la valeur de U à la fin de l'algorithme lorsqu'on le fait fonctionner en prenant $N = n$.

Ainsi, pour obtenir u_5, il faut faire fonctionner l'algorithme précédent avec $N = 5$. On peut le faire à l'aide d'un tableau :

U	1	2	4	8
$U < 5$	vrai	vrai	vrai	faux

Ainsi, $u_5 = 8$.

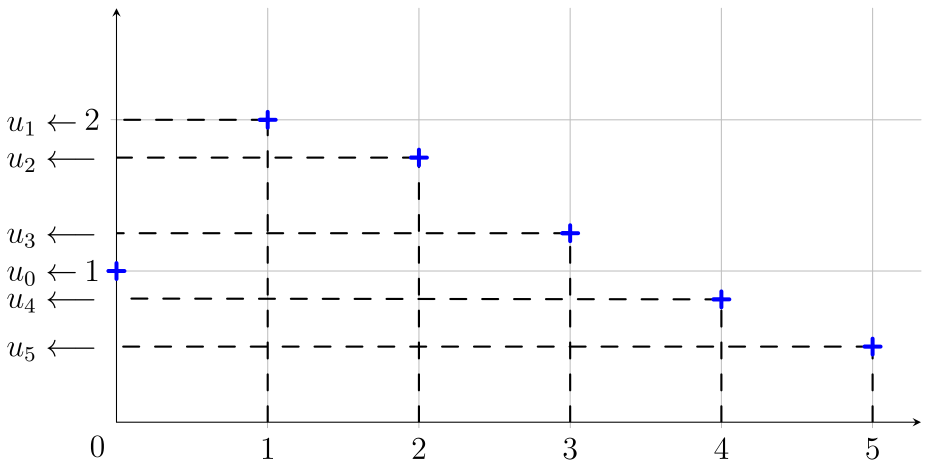
III. — Représentation graphique

On peut représenter graphiquement une suite $u : A \to \mathbb{N}$ dans un repère par l'ensemble des points de coordonnées (n, u_n) lorsque $n \in A$. Une telle représentation s'appelle une nuage de points.

L'ensemble A étant en général infini, on ne représentera dans la pratique qu'une partie du nuage de points correspondant aux premières valeurs de n.

Exemple 9. On considère la suite (u_n) définie par : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \frac{3n+1}{2^n}$.

On peut représenter la suite (u_n) par le nuage de points suivants :



IV. — Variations

Définition 10

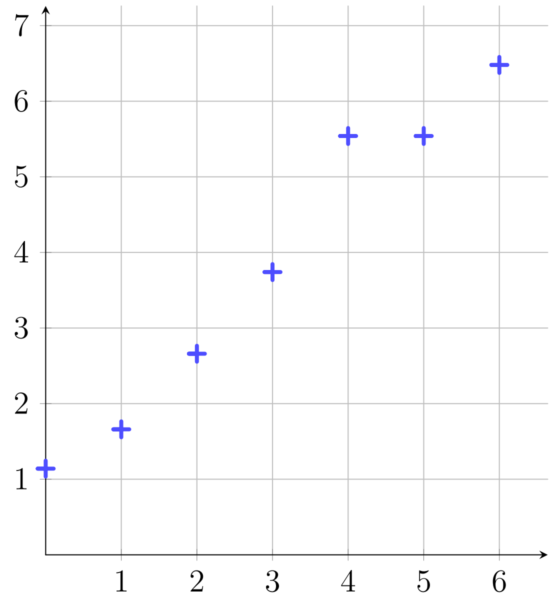
Soit N un entier naturel et (u_n) une suite réelle définie (au moins) à partir du rang N. On dit que :

— (u_n) est **croissante** à partir du rang N si, pour tout entier $n \geqslant N$, $u_{n+1} \geqslant u_n$;

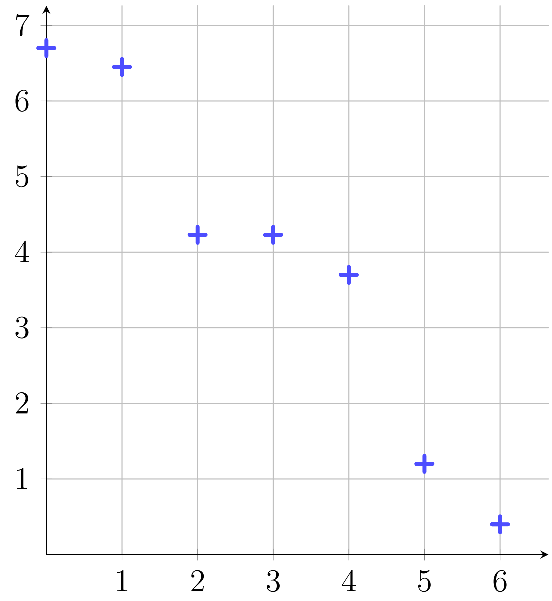
— (u_n) est **décroissante** à partir du rang N si, pour tout entier $n \geqslant N$, $u_{n+1} \leqslant u_n$;

— (u_n) est **constante** à partir du rang N si, pour tout entier $n \geqslant N$, $u_{n+1} = u_n$;

— (u_n) est **monotone** à partir du rang N si (u_n) est croissante ou décroissante à partir du rang N.



Nuage de points d'une suite croissante



Nuage de points d'une suite décroissante

Remarque 11.

1. Il existe des suites qui ne sont pas monotones. Par exemple, la suite (u_n) définie, pour tout $n \in \mathbb{N}$, par $u_n = (-1)^n$. En effet, si n est pair alors $(-1)^n = 1$ et $(-1)^{n+1} = (-1)\times(-1)^n = -1$ donc $u_n \geqslant u_{n+1}$ mais, si n est impair, $(-1)^n = -1$ et $(-1)^{n+1} = (-1) \times (-1)^n = 1$ donc $u_n \leqslant u_{n+1}$. Ainsi, la suite (u_n) change constamment de variation. C'est le cas de toute les suites qui ont un signe qui change en fonction de la parité de n. Ces suites sont appelées des suites alternées.
2. Si, dans la définition 1, les inégalités sont strictes, on parle de suite strictement croissante ou strictement décroissante.
3. Par définition, les suites constantes sont à la fois croissantes et décroissantes et ce sont les seules à posséder cette propriété.

On se donne une suite (u_n) définie sur A. Pour étudier les variations de (u_n), on dispose de plusieurs méthodes.

Méthode 12

Par une Comparaison directe

On peut essayer de comparer directement, pour tout $n \in A$, les nombres u_n et u_{n+1}.

Exemple 13. — Étudier les variations de la suite (u_n) définie, pour tout $n \in \mathbb{N}$, par $u_n = \dfrac{1}{2n+1}$.

Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors, $n \leqslant n+1$ donc, comme $2 \geqslant 0$, $2n \leqslant 2(n+1)$ et donc $2n+1 \leqslant 2(n+1)+1$. De plus, comme $n \geqslant 0$, $0 < 2n+1 \leqslant 2(n+1)+1$. Par décroissance de la fonction inverse sur $]0\,;+\infty[$, on en déduit que $\dfrac{1}{2n+1} \geqslant \dfrac{1}{2(n+1)+1}$ i.e. $u_n \geqslant u_{n+1}$.

On conclut donc que (u_n) est décroissante.

Méthode 14

Par l'étude du signe de la différence

On peut étudier, pour tout $n \in A$, le signe de la différence $u_{n+1} - u_n$ pour tout $n \in A$. Si, pour tout $n \in A$, $u_{n+1} - u_n \geqslant 0$ alors $u_{n+1} \geqslant u_n$ donc (u_n) est croissante et, si pour tout $n \in A$, $u_{n+1} - u_n \leqslant 0$ alors $u_{n+1} \leqslant u_n$ donc (u_n) est décroissante.

Exemple 15. — Étudier les variations de la suite (u_n) définie, pour tout $n \in \mathbb{N}$, par $u_n = n^2 - 5n + 1$.

Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors,

$$u_{n+1} = (n+1)^2 - 5(n+1) + 1 = n^2 + 2n + 1 - 5n - 5 + 1 = n^2 - 3n - 3$$

donc

$$u_{n+1} - u_n = n^2 - 3n - 3 - (n^2 - 5n + 1) = n^2 - 3n - 3 - n^2 + 5n - 1 = 2n - 4$$

Ainsi,

$$u_{n+1} - u_n \geqslant 0 \Leftrightarrow 2n - 4 \geqslant 0 \Leftrightarrow 2n \geqslant 4 \Leftrightarrow n \geqslant 2$$

donc (u_n) est croissante à partir du rang 2.

Méthode 16

Comparer le rapport avec 1 si la suite est strictement positive

On suppose que, pour tout $n \in A$, $u_n > 0$. On peut étudier, pour tout $n \in A$, le rapport $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ et le comparer avec 1. Si, pour tout $n \in A$, $\frac{u_{n+1}}{u_n} \geqslant 1$ alors, comme $u_n \geqslant 1$, $u_{n+1} \geqslant u_n$ donc (u_n) est croissante et si, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant 1$ alors, de même, $u_{n+1} \leqslant u_n$ donc (u_n) est décroissante.

Cette méthode ne s'applique qu'aux suites dont tous les termes sont strictement positifs.

Exemple 17. — Étudier les variations de la suite (u_n) définie, pour tout $n \in \mathbb{N}$, par $u_n = \dfrac{5^n}{7^n}$.

Comme $5 > 0$ et $7 > 0$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $5^n > 0$ et $7^n > 0$ donc $u_n > 0$.

Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors,

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\frac{5^{n+1}}{7^{n+1}}}{\frac{5^n}{7^n}} = \frac{5^{n+1}}{7^{n+1}} \times \frac{7^n}{5^n} = \frac{5 \times 5^n}{7 \times 7^n} \times \frac{7^n}{5^n} = \frac{5}{7} \leqslant 1$$

donc (u_n) est décroissante.