⧫ Chapitre 2. — Dérivation

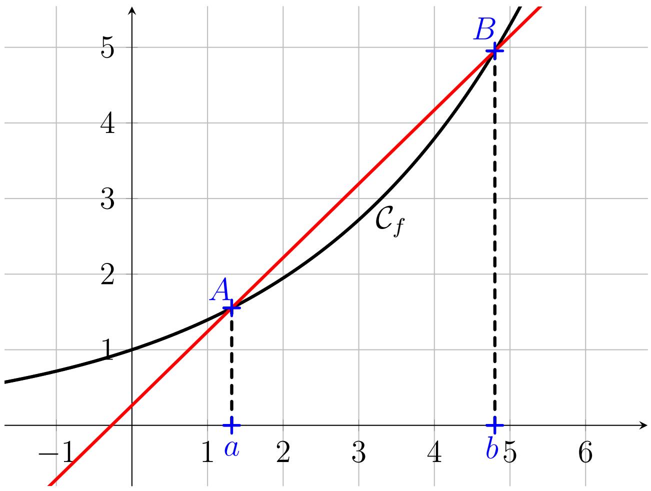
I. — Nombre dérivé

1) Sécante et taux de variation

Dans tout ce paragraphe, f est une fonction définie sur un intervalle I. On note $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative de f dans un repère $\left(\mathrm{O}\,;\vec{\imath},\vec{\jmath}\right)$. On désigne par a et b deux éléments de I tels que $a \neq b$.

Définition 1

La droite passant par les points $A\,(a\,;f(a))$ et $B\,(b\,;f(b))$ est appelée la sécante à $\mathcal{C}_f$ aux points d'abscisses a et b.



Propriété 2

Le coefficient directeur de la sécante à $\mathcal{C}_f$ aux points d'abscisses a et b est

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

Démonstration. Notons T la sécante à $\mathcal{C}_f$ aux points d'abscisses a et b. Alors, $T=(AB)$ avec $A\,(a\,;f(a))$ et $B\,(b\,;f(b))$. Le coefficient directeur de T est donc

$$\frac{y_B-y_A}{x_B-x_A}=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

□

Remarque 3.

1. En échangeant le rôle de A et B, le nombre $\frac{f(a)-f(b)}{a-b}$ est aussi le coefficient directeur de la sécante à $\mathcal{C}_f$ aux points d'abscisses a et b.

2. On considère un réel h (non nul) tel que $a+h$ appartienne à I. Alors, en prenant $b = a+h$, on a que le taux de variation de f entre a et $a+h$ est

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{(a+h)-a} = \frac{f(a+h)-f(a)}{h}.$$

Définition 4

Le nombre $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ est appelé le taux de variation (ou taux d'accroissement) de f entre a et b.

Exemple 5.

1. On suppose ici que $f : x \mapsto x^2$, que $a = 1$ et que $b = 3$. Le taux de variation de f entre a et b est
$$\frac{f(3)-f(1)}{3-1} = \frac{3^2-1^2}{2} = \frac{8}{2} = 4.$$
2. On suppose ici que $f : x \mapsto \frac{1}{x}$, que $a = -5$ et que $b = -2$. Le taux de variation de f entre a et b est
$$\frac{f(-5)-f(-2)}{-5-(-2)} = \frac{\frac{1}{-5}-\frac{1}{-2}}{-3} = \frac{3}{10\times(-3)} = -\frac{1}{10}.$$
3. On suppose ici que f est une fonction affine et que a et b sont deux réels. On écrit f sous la forme $f : x \mapsto mx+p$ avec m et p deux réels. Alors, le taux de variation de f entre a et b est
$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = \frac{mb+p-(ma+p)}{b-a} = \frac{m(b-a)}{b-a} = m.$$
Ceci était prévisible graphiquement : comme f est affine, $\mathcal{C}_f$ est une droite et donc la sécante à $\mathcal{C}_f$ aux points d'abscisses a et b est la droite $\mathcal{C}_f$ elle-même. Le taux de variation de f entre a et b qui n'est autre que le coefficient directeur de $\mathcal{C}_f$ est ainsi égal à m.
4. Si $D(t)$ désigne la distance parcourue par un mobile en fonction du temps t alors le taux de variation de D entre a et b représente la vitesse moyenne du mobile sur $[a\,;b]$. En physique, on note ce taux $\frac{\Delta D}{\Delta t}$ (une variation de D divisée par la variation de t correspondante.)
5. Si $C(q)$ désigne le coût de fabrication de q exemplaires d'un même objet alors le taux de variation de C entre a et b représente le coût moyen de la fabrication de cet objet pour une quantité comprise entre a et b.

2) Nombre dérivé et tangente

On s'intéresse ici au comportement de la sécante et du coefficient directeur lorsque b se rapproche de a. Si on écrit b sous la forme $a+h$, cela revient à étudier ce comportement lorsque h se rapproche de 0.

On va examiner trois exemples.

Exemple 6. On considère ici la fonction $f : x \mapsto -x^2+5x+2$ et $a = 1$. On a alors $f(1) = -1^2+5\times 1+2 = 6$ et, pour tout réel $h \neq 0$, $f(1+h) = -(1+h)^2+5(1+h)+2 = -(1+2h+h^2)+5+5h+2 = -h^2+3h+6$. Ainsi, pour tout réel $h \neq 0$, le taux de variation de f entre 1 et $1+h$ est

$$t(h) = \frac{f(1+h)-f(1)}{h} = \frac{-h^2+3h+6-6}{h} = \frac{-h^2+3h}{h} = -h+3$$

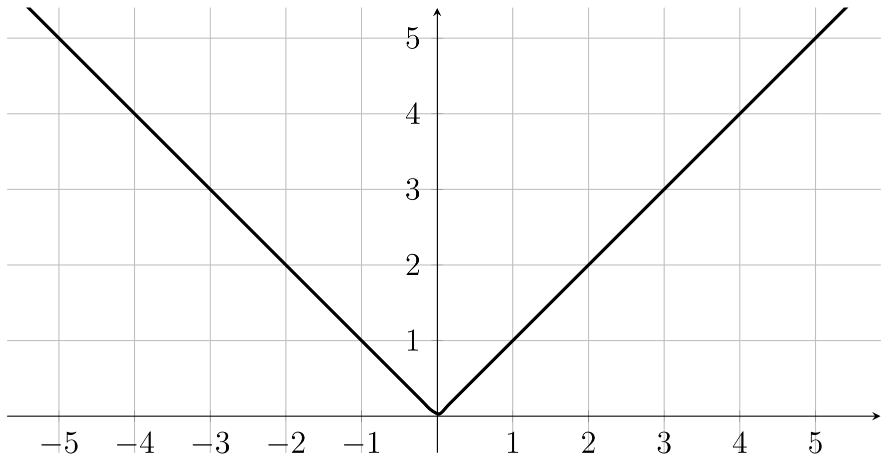
Lorsque h se rapproche infiniment de 0, le nombre $-h+3$ se rapproche infiniment de 3. On dit que $-h+3$ tend vers 3 quand h tend vers 0. On dit alors que le taux de variation $t(h)$ converge quand h tend vers 0 et que sa limite est 3. On note alors $\lim_{h\to 0} t(h) = 3$.

Exemple 7. On considère ici la fonction $f : x \mapsto x\sqrt{x}$ et $a = 0$. On a alors $f(0) = 0 \times \sqrt{0} = 0$ et, pour tout réel $h > 0$, $f(0+h) = (0+h)\sqrt{0+h} = h\sqrt{h}$. Ainsi, pour tout réel $h > 0$, le taux de variation de f entre 0 et $0+h$ est

$$t(h) = \frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \frac{h\sqrt{h}-0}{h} = \frac{h\sqrt{h}}{h} = \sqrt{h}$$

Lorsque h se rapproche infiniment de 0, le nombre $\sqrt{h}$ se rapproche infiniment de 0. Ainsi, le taux de variation $t(h)$ converge quand h tend vers 0 et sa limite est 0 : $\lim_{h\to 0} t(h) = 0$.

Exemple 8 (A CONNAÎTRE)**.** On considère ici la fonction valeur absolue définie par $f : x \mapsto |x|$. Si $x \geqslant 0$ alors $f(x) = x$ et si $x \leqslant 0$ alors $f(x) = -x$. Ainsi, la courbe de f est composée de deux demi-droites (qui forme un "V") ;



Considérons $a = 0$. On a alors $f(0) = |0| = 0$ et, pour tout réel h, $f(0+h) = |0+h| = |h|$. Ainsi, pour tout réel $h \neq 0$, le taux de variation de f entre 0 et $0+h$ est

$$t(h) = \frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \frac{|h|-0}{h} = \frac{|h|}{h}$$

Ainsi, si $h > 0$, $t(h) = \frac{h}{h} = 1$ et, si $h < 0$, $t(h) = \frac{-h}{h} = -1$. Lorsque h se rapproche infiniment de 0, le nombre $t(h)$ ne se rapproche pas d'un nombre fixe : on dit que le taux de variation $t(h)$ diverge quand h tend vers 0.

On voit donc que, selon les cas, la taux de variation peut ou non converger lorsque h tend vers 0.

Définition 9

On dit que f est dérivable en a si le taux de variation $t(h) = \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ converge vers une limite ℓ quand h tend vers 0 (et $a+h \in I$).

Le nombre ℓ est alors appelé le nombre dérivé de f en a. On le note $f'(a)$.

Remarque 10. Ainsi, si f est dérivable en a, on a par définition

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=f'(a).$$

En écrivant $a+h=x$ avec x qui se rapproche de a quand h se rapproche de 0, ceci est équivalent à dire que

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=f'(a).$$

Exemple 11. Considérons la fonction $f : x\mapsto 1-5x^2$ et $a=2$. Alors, $f(2)=1-5\times 2^2=1-20=-19$ et, pour tout réel h, $f(2+h)=1-5(2+h)^2=1-5(4+4h+h^2)=1-20-20h-5h^2=-5h^2-20h-19$. Ainsi, pour tout réel $h\neq 0$, le taux de variation de f entre 2 et $2+h$ est

$$t(h)=\frac{f(2+h)-f(2)}{h}=\frac{-5h^2-20h-19-(-19)}{h}=\frac{-5h^2-20h}{h}=-5h-20.$$

Lorsque h se rapproche de 0, $t(h)$ se rapproche de -20 donc f est dérivable en 2 et $f'(2)=-20$.

Exemple 12. Considérons la fonction $f : x\mapsto \frac{x+3}{x^2+1}$. Montrons que f est dérivable en -1 et déterminons $f'(-1)$.

On a, d'une part, $f(-1)=\frac{-1+3}{(-1)^2+1}=\frac{2}{2}=1$ et, d'autre part, pour tout réel h,

$$f(-1+h)=\frac{-1+h+3}{(-1+h)^2+1}=\frac{h+2}{1-2h+h^2+1}=\frac{h+2}{h^2-2h+2}.$$

Ainsi, pour tout réel h, le taux de variation de f entre -1 et $-1+h$ est

$$t(h)=\frac{f(-1+h)-f(-1)}{h}=\frac{\frac{h+2}{h^2-2h+2}-1}{h}=\frac{\frac{h+2-(h^2-2h+2)}{h^2-2h+2}}{h}=\frac{h+2-h^2+2h-2}{h(h^2-2h+2)}$$

donc

$$t(h)=\frac{-h^2+3h}{h(h^2-2h+2)}=\frac{h(-h+3)}{h(h^2-2h+2)}=\frac{-h+3}{h^2-2h+2}.$$

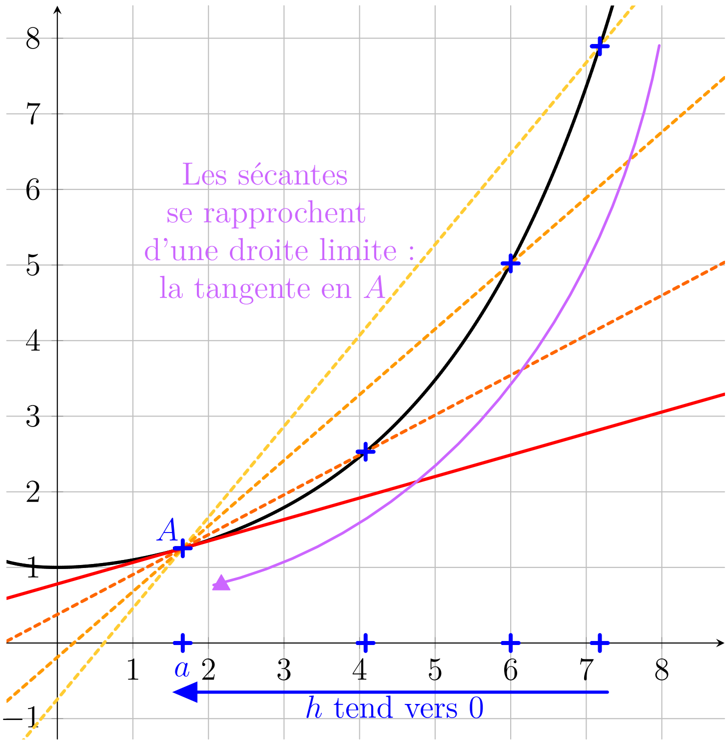
Lorsque h se rapproche de 0, $t(h)$ se rapproche de $\frac{3}{2}$ donc f est dérivable en -1 est $f'(-1)=\frac{3}{2}$.

Exemple 13 (À CONNAÎTRE)**.**

1. Si $D(t)$ désigne la distance parcourue par un mobile en fonction du temps t alors $D'(t)$ est la vitesse instantanée du mobile au temps t.
2. Si $C(q)$ désigne le coût de production de q exemplaires d'un même objet, on définit le coût marginal $C_M(q)$ comme le coût engendré par la fabrication d'un objet supplémentaire. Autrement dit, $C_M(q)=C(q+1)-C(q)$. On peut remarquer que $C_M(q)=\frac{C(q+1)-C(q)}{1}$ donc $C_M(q)$ est le taux de variation de q entre q et $q+1$. Il n'est pas égal à $C'(q)$ mais si q est assez grand ces deux nombres sont en général assez proches. On peut donc approcher $C_M(q)$ par $C'(q)$.

Définition 14

La tangente à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse a est, si elle existe, la position limite des sécantes à $\mathcal{C}_f$ aux points d'abscisses a et $a+h$ quand h se rapproche de 0.



Propriété 15

On suppose que f est dérivable en a. Alors, l'équation réduite de la tangente T à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse a est
$$y = f'(a)(x-a) + f(a).$$

Démonstration. Par définition, la droite T est la position limite des sécantes à $\mathcal{C}_f$ aux abscisses a et $a+h$ quand h tend vers 0 donc son coefficient directeur est la limite des coefficients directeur des sécantes. Or, par définition, puisque f est dérivable en a, cette limite est $f'(a)$. Ainsi, T a une équation réduite de la forme $y = f'(a)x + p$ avec $p \in \mathbb{R}$. De plus, T passe par le point $A\,(a\,;f(a))$ donc $f(a) = f'(a) \times a + p$ donc $p = f(a) - f'(a) \times a$. Ainsi, l'équation réduite de T est $y = f'(a)x + f(a) - f'(a)a$ i.e. $y = f'(a)(x-a) + f(a)$. □

Exemple 16. On considère ici $f : x \mapsto \frac{x+3}{x^2+1}$ et $a = -1$. On a vu dans l'exemple 12 que $f(-1) = 1$ et $f'(-1) = \frac{3}{2}$ donc la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse -1 a pour équation $y = \frac{3}{2}(x-(-1)) + 1$ i.e. $y = \frac{3}{2}x + \frac{5}{2}$.

Remarque 17 (IMPORTANT). Ainsi, le nombre dérivé en a s'interprète graphiquement comme le coefficient directeur de la tangente à la courbe au point d'abscisse a.

II. — Fonction dérivée

1) Définition

Définition 18

Soit f une fonction définie sur un intervalle I. On dit que f est dérivable sur I si f est dérivable en tout point $a \in I$.

Définition 19

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I. La fonction $x \mapsto f'(x)$ est appelée la fonction dérivée (ou simplement la dérivée) de f sur I. On la note f'.

Exemple 20. Considérons $f : x \mapsto x^2 - 3x$ et $I = \mathbb{R}$. Soit $a \in \mathbb{R}$. Alors, pour tout $h \neq 0$,

$$\begin{aligned} t(h) &= \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \frac{(a+h)^2 - 3(a+h) - (a^2 - 3a)}{h} \\ &= \frac{a^2 + 2ah + h^2 - 3a - 3h - a^2 + 3a}{h} \\ &= \frac{2ah + h^2 - 3h}{h} \\ &= 2a + h - 3 \end{aligned}$$

Ainsi, quand h se rapproche de 0, $t(h)$ rapproche de $2a - 3$. On en déduit de f est dérivable en a et que $f'(a) = 2a - 3$.

Comme ceci est vrai pour tout réel a, f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa fonction dérivée est $f' : x \mapsto 2x - 3$.

2) Fonctions de référence

Propriété 21. — Dérivabilité des fonctions affines

Soit m et p deux réels. La fonction affine $f : x \mapsto mx + p$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa fonction dérivée est $f' : x \mapsto m$.

En particulier, si f est constante alors f' est nulle.

Démonstration. On l'a déjà démontré dans le point **3.** de l'exemple 5. □

Propriété 22. — Dérivabilité des fonctions carré, cube et inverse

1. La fonction carré $f : x \mapsto x^2$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée est $f' : x \mapsto 2x$.
2. La fonction cube $f : x \mapsto x^3$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée est $f' : x \mapsto 3x^2$.
3. La fonction inverse $f : x \mapsto \frac{1}{x}$ est dérivable sur chacun des deux intervalles $]-\infty\,;0[$ et $]0\,;+\infty[$ et, sur chacun d'eux, sa dérivée est $f : x \mapsto -\frac{1}{x^2}$.

Démonstration.

1. Soit $a \in \mathbb{R}$. Pour tout $h \neq 0$,
$$t(h) = \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \frac{(a+h)^2 - a^2}{h} = \frac{a^2 + 2ah + h^2 - a^2}{h} = \frac{2ah + h^2}{h} = 2a + h$$
donc $\lim\limits_{h \to 0} t(h) = 2a$. Ainsi, f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f' : x \mapsto 2x$.
2. Soit $a \in \mathbb{R}$. Pour tout $h \neq 0$,
$$\begin{aligned} t(h) &= \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \frac{(a+h)^3 - a^3}{h} = \frac{a^3 + 3a^2h + 3ah^2 + h^3 - a^3}{h} \\ &= \frac{3a^2h + 3ah^2 + h^3}{h} = 3a^2 + 2ah + h^2 \end{aligned}$$
donc $\lim\limits_{h \to 0} t(h) = 3a^2$. Ainsi, f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f' : x \mapsto 3x^2$.

3. Soit un réel $a \neq 0$. Pour tout $h \neq 0$ tel que $a+h \neq 0$,

$$t(h) = \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \frac{\frac{1}{a+h} - \frac{1}{a}}{h} = \frac{\frac{a-(a+h)}{a(a+h)}}{h} = \frac{-h}{ah(a+h)} = \frac{-1}{a(a+h)}$$

donc $\lim\limits_{h \to 0} t(h) = -\frac{1}{a^2}$. Ainsi, f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f' : x \mapsto -\frac{1}{x^2}$.

□

Propriété 23. — Dérivabilité de la fonction racine carrée

La fonction racine carrée $f : x \mapsto \sqrt{x}$ est définie sur $[0\,;+\infty[$ et elle dérivable sur $]0\,;+\infty[$. En revanche, elle n'est pas dérivable en 0.

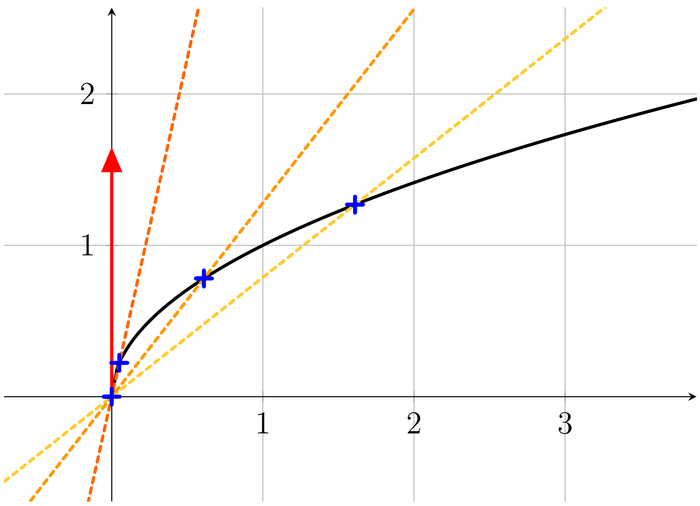
Démonstration. Soit $a \in \mathbb{R}_+$. Pour tout réel $h \neq 0$ tel que $a+h \geqslant 0$,

$$\begin{aligned} t(h) &= \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \frac{\sqrt{a+h}-\sqrt{a}}{h} = \frac{\left(\sqrt{a+h}-\sqrt{a}\right)\left(\sqrt{a+h}+\sqrt{a}\right)}{h\left(\sqrt{a+h}+\sqrt{a}\right)} \\ &= \frac{a+h-a}{h\left(\sqrt{a+h}+\sqrt{a}\right)} = \frac{h}{h\left(\sqrt{a+h}+\sqrt{a}\right)} = \frac{1}{\sqrt{a+h}+\sqrt{a}} \end{aligned}$$

Si $a \neq 0$, $\lim\limits_{h \to 0} t(h) = \frac{1}{2\sqrt{a}}$ donc f est dérivable sur $]0\,;+\infty[$ et sa dérivée est $f' : x \mapsto \frac{1}{2\sqrt{x}}$.

Si $a = 0$ alors $t(h) = \frac{1}{\sqrt{h}}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $t(10^{-2n}) = 10^n$. Ainsi $t(0{,}01) = 10$, $t(0{,}0001) = 100$, $t(0{,}000001) = 1000$, etc. Ainsi, on a des valeurs de h qui se rapprochent infiniment de 0 et telles que $t(h)$ devient infiniment grand donc $t(h)$ ne converge pas. On conclut que f n'est pas dérivable en 0. □

Remarque 24. D'un point de vue graphique, le fait que la fonction racine carrée ne soit pas dérivable en 0 s'explique par le fait que les sécantes entre les points d'abscisse 0 et h deviennent de plus en plus verticales quand h tend vers 0. La position limite est une droite verticale.



Dans ce cas, on dit que la courbe possède une demi-tangente verticale.