⧫ Chapitre 1. — Équations du second degré

I. — Fonctions polynômes du second degré

1) Définition et exemples

Définition 1

Une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ est appelée fonction polynôme du second degré s'il existe trois réels a, b et c avec $a \neq 0$ tels que, pour tout réel x,

$$f(x) = ax^2 + bx + c.$$

Exemple 2. Les fonctions suivantes sont des fonctions polynômes du second degré :

1. $x \mapsto x^2 - 5x + 4$ $\quad(a = 1,\ b = -5,\ c = 4)$;
2. $x \mapsto -\frac{5}{3}x^2 + \sqrt{5}x - \pi$ $\quad(a = -\frac{5}{3},\ b = \sqrt{5},\ c = -\pi)$;
3. $x \mapsto -x^2 + 3 - \frac{x}{7}$ $\quad(a = -1,\ b = -\frac{1}{7},\ c = 3)$;
4. $x \mapsto 2 - \frac{x^2}{2}$ $\quad(a = -\frac{1}{2},\ b = 0,\ x = 2)$;
5. $x \mapsto 3x^2 - 5x$ $\quad(a = 3,\ b = -5,\ c = 0)$;
6. $x \mapsto x^2$ $\quad(a = 1,\ b = 0,\ c = 0)$.

Exercice 3. La fonction $f : x \mapsto (x+1)^3 - x^3$ est-elle une fonction polynôme du second degré ?

Remarque 4. Si f est une fonction polynôme du second degré alors, pour tout réel x, $f(x)$ est la somme de trois termes : ax^2, bx et c. Ces trois termes sont appelés des monômes et on dit parfois que f est une fonction trinôme du second degré (trinôme signifiant « somme de trois monômes »).

Propriété 5

L'écriture d'une fonction polynôme du second degré sous la forme $f : x \mapsto ax^2 + bx + c$ est unique. Cette forme est appelée la forme développée (réduite et ordonnée) de f.

Le nombre a est appelé le coefficient dominant de f et le nombre c est appelé le coefficient constant de f.

Démonstration. Supposons que f s'écrive à la fois sous la forme $f : x \mapsto ax^2 + bx + c$ et $f : x \mapsto a'x^2 + b'x + c'$. On va montrer que $a = a'$, $b = b'$ et $c = c'$. Par hypothèse, pour tout réel x, $f(x) = ax^2 + bx + c = a'x^2 + b'x + c$. En particulier, on a donc $f(0) = c = c'$ et donc, pour tout réel x, $ax^2 + bx = a'x^2 + b'x$. En prenant $x = 1$ puis $x = -1$, on en déduit que $a + b = a' + b'$ et $a - b = a' - b'$. Ainsi, $a = \frac{a+b+(a-b)}{2} = \frac{a'+b'+(a'-b')}{2} = a'$ et $b = \frac{a+b-(a-b)}{2} = \frac{a'+b'-(a'-b')}{2} = b'$. Ainsi, l'unicité est bien démontrée. □

2) Forme canonique

Dans tout ce paragraphe, sauf mention contraire, a, b et c sont trois réels tels que $a \neq 0$ et f est la fonction trinôme du second degré définie par $f : x \mapsto ax^2 + bx + c$.

Propriété 6

Pour tout réel x,

$$f(x) = a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2-4ac}{4a^2}\right].$$

Démonstration. Soit $x \in \mathbb{R}$. Comme a n'est pas nul, on peut écrire

$$f(x) = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right)$$

.

En considérant la somme $x^2 + \frac{b}{a}x$ comme « le début » du développement d'une identité remarquable, on peut écrire $x^2 + \frac{b}{a}x = \left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2$ ce qui donne alors :

$$f(x) = a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c\times 4a}{a\times 4a}\right] = a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{4ac}{4a^2}\right]$$

et donc $f(x) = a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2-4ac}{4a^2}\right]$. □

Ainsi, il existe deux nombres réels $\alpha = \frac{b}{2a}$ et $\beta = \frac{b^2-4ac}{4a^2}$ tels que, pour tout réel x,

$$f(x) = a\left[(x+\alpha)^2 - \beta\right].$$

Définition 7

La forme

$$f : x \mapsto a\left[(x+\alpha)^2 - \beta\right]$$

s'appelle la forme canonique de f.

Méthode 8

Il n'est pas question d'apprendre par cœur la formule de la propriété 6 lorsqu'on cherche la forme canonique. On la retrouve au cas par cas en utilisant la « complétion du carré » :

$$x^2 + bx = \left(x+\frac{b}{2}\right)^2 - \left(\frac{b}{2}\right)^2.$$

Exemple 9.

1. Considérons la fonction polynôme du second degré $f : x \mapsto x^2 + 6x + 7$. Par complétion du carré, $x^2 + 6x = (x+3)^2 - 3^2 = (x+3)^2 - 9$ donc la forme canonique de f est :

$$f : x \mapsto (x+3)^2 - 9 + 7 \qquad \text{i.e.} \qquad f : x \mapsto (x+3)^2 - 2.$$

2. Considérons la fonction polynôme du second degré $f : x \mapsto 3x^2 - 4x + 5$. On a, pour tout réel x,
$$f(x) = 3\left(x^2 - \frac{4}{3}x + \frac{5}{3}\right)$$
Or, par complétion du carré, pour tout réel x,
$$x^2 - \frac{4}{3}x = \left(x - \frac{2}{3}\right)^2 - \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \left(x - \frac{2}{3}\right)^2 - \frac{4}{9}$$
donc la forme canonique de f est : pour tout réel x,
$$f(x) = 3\left[\left(x - \frac{2}{3}\right)^2 - \frac{4}{9} + \frac{5}{3}\right] = 3\left[\left(x - \frac{2}{3}\right)^2 + \frac{11}{9}\right].$$

II. — Résolution dans $\mathbb{R}$ d'une équation du second degré

Dans toute cette partie, sauf mention contraire, a, b et c sont trois réels tels que $a \neq 0$ et (E) désigne l'équation d'inconnue x :
$$(E) : ax^2 + bx + c = 0$$
On note, de plus, f la fonction trinôme du second degré définie par $f : x \mapsto ax^2 + bx + c$. Ainsi, (E) est l'équation $f(x) = 0$ d'inconnue x.

Le but de cette partie est de donner des méthodes pour résoudre l'équation (E) dans $\mathbb{R}$. On commence par deux cas particuliers puis on donne la méthode générale.

1) Premier cas favorable : $c = 0$

Lorsque $c = 0$, on peut se ramener à une équation produit en factorisant par x.

Exemple 10. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $(E_1) : -x^2 + 4x = 0$.

On a
$$(E_1) \Leftrightarrow -x \times x + 4 \times x = 0 \Leftrightarrow x(-x+4) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } -x+4 = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } x = 4$$
Ainsi, l'ensemble des solutions de (E_1) dans $\mathbb{R}$ est $\{0, 4\}$.

2) Second cas favorable : $b = 0$

Si $b = 0$ alors, en divisant par a, (E) est équivalente à une équation de la forme $x^2 + d = 0$ et la résolution de cette équation dépend du signe de d.

Exemple 11.

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $(E_2) : 16x^2 - 9 = 0$.
   On a
$$(E_2) \Leftrightarrow x^2 - \frac{9}{16} = 0 \Leftrightarrow x^2 - \left(\frac{3}{4}\right)^2 = 0 \Leftrightarrow \left(x + \frac{3}{4}\right)\left(x - \frac{3}{4}\right) = 0$$
$$\Leftrightarrow x + \frac{3}{4} = 0 \text{ ou } x - \frac{3}{4} = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{3}{4} \text{ ou } x = -\frac{3}{4}.$$
   Ainsi, l'ensemble des solutions de (E_2) est $\{-\frac{3}{4}, \frac{3}{4}\}$.
2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $(E_3) : 16x^2 + 9 = 0$.
   Pour tout réel x, $x^2 \geqslant 0$ donc $16x^2 \geqslant 0$ et donc $16x^2 + 9 \geqslant 0$. Ainsi, l'ensemble des solutions de (E_3) dans $\mathbb{R}$ est $\varnothing$.

Remarque 12. Pour une équation de la forme $x^2 = m$ avec $m > 0$, il n'est pas obligatoire de repasser par la factorisation de $x^2 - m$. On peut directement écrire que
$$x^2 = m \Leftrightarrow x = \sqrt{m} \text{ ou } x = -\sqrt{m}.$$

3) Cas général

Dans le cas général, nous allons voir que la forme canonique de f est un bon outil pour la résolution de (E). Rappelons qu'on peut écrire, pour tout réel x,

$$f(x) = a\left[(x+\alpha)^2 - \beta\right]$$

avec

$$\alpha = \frac{b}{2a} \qquad \text{et} \qquad \beta = \frac{b^2-4ac}{4a^2}.$$

Remarquons tout d'abord que, comme $a \neq 0$, (E) équivaut à $(x+\alpha)^2 - \beta = 0$. On est donc ramener à un cas semblable au précédent et la résolution va dépendre du signe de β. Or, comme $4a^2 > 0$, le signe de β est donné par celui de $b^2 - 4ac$. C'est donc le signe de ce nombre qui va permettre de savoir dans quel cas on se trouve.

Cela justifie la définition suivante.

Définition 13

On appelle discriminant de l'équation (E) le nombre $b^2 - 4ac$ et on le note Δ.

Ainsi, par définition, $\Delta = b^2 - 4ac$. Remarquons qu'avec cette notation, β s'écrit $\dfrac{\Delta}{4a^2}$.

Il y a alors trois cas possibles.

1. Cas où $\Delta < 0$

Dans ce cas, $-\beta = -\dfrac{\Delta}{4a^2} > 0$ donc, pour tout réel x, $(x+\alpha)^2 - \beta > 0$ et ainsi (E) n'a pas de solution dans $\mathbb{R}$.

2. Cas où $\Delta = 0$

Dans ce cas, $\beta = 0$ donc

$$(E) \Leftrightarrow (x+\alpha)^2 = 0 \Leftrightarrow x + \alpha = 0 \Leftrightarrow x = -\alpha.$$

Ainsi, l'unique solution réelle de (E) est $x_0 = -\alpha = -\dfrac{b}{2a}$.

3. Cas où $\Delta > 0$

Dans ce cas, on peut écrire $\Delta = \sqrt{\Delta}^2$ et on a alors $\beta = \dfrac{\Delta}{4a^2} = \left(\dfrac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)^2$ donc

$$\begin{aligned}(E) \Leftrightarrow (x+\alpha)^2 - \left(\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)^2 &\Leftrightarrow \left(x + \alpha - \frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\left(x + \alpha - \frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right) = 0 \\ &\Leftrightarrow x + \alpha - \frac{\sqrt{\Delta}}{2a} = 0 \text{ ou } x + \alpha + \frac{\sqrt{\Delta}}{2a} = 0 \\ &\Leftrightarrow x = -\alpha + \frac{\sqrt{\Delta}}{2a} \text{ ou } x = -\alpha + \frac{\sqrt{\Delta}}{2a}.\end{aligned}$$

Sachant que $\alpha = \dfrac{b}{2a}$, on conclut que l'équation (E) admet deux solutions réelles qui sont données par

$$x_1 = -\frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} \qquad \text{et} \qquad x_2 = -\frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}.$$

On a donc démontré le théorème suivant.

Théorème 14

Soit a, b et c trois réels tels que $a \neq 0$. On pose $\Delta = b^2 - 4ac$. Alors, l'ensemble des solutions dans $\mathbb{R}$ de l'équation $(E) : ax^2 + bx + c = 0$ est

1. $\varnothing$ si $\Delta < 0$;
2. $\left\{-\dfrac{b}{2a}\right\}$ si $\Delta = 0$;
3. $\left\{\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}, \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}\right\}$ si $\Delta > 0$.

Exemple 15. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les quatre équations suivantes :

1. $(E_3) : 3x^2 + 2x - 1 = 0$
   Le discriminant de (E_3) est $\Delta = 2^2 - 4 \times 3 \times (-1) = 4 + 12 = 16 > 0$ donc l'équation a deux solutions réelles :
   $$x_1 = \frac{-2+\sqrt{16}}{2 \times 3} = \frac{1}{3} \qquad \text{et} \qquad x_2 = \frac{-2-\sqrt{16}}{2 \times 3} = -1.$$
   Ainsi, l'ensemble des solutions dans $\mathbb{R}$ de (E_3) est $\left\{\frac{1}{3}, -1\right\}$.
2. $(E_4) : \frac{1}{4}x^2 + x + 1 = 0$
   Le discriminant de (E_4) est $\Delta = 1^2 - 4 \times \frac{1}{4} \times 1 = 1 - 1 = 0$ donc l'équation a une unique solution réelle :
   $$x_0 = \frac{-1}{2 \times \frac{1}{4}} = \frac{-1}{\frac{1}{2}} = -2$$
   Ainsi, l'ensemble des solutions dans $\mathbb{R}$ de (E_4) est $\{-2\}$.
3. $(E_5) : x^2 + x + 1$
   Le discriminant de (E_5) est $\Delta = 1^2 - 4 \times 1 \times 1 = -3 < 0$ donc l'équation n'a pas de solution réelle. Ainsi, l'ensemble des solutions dans $\mathbb{R}$ de (E_5) est $\varnothing$.
4. $(E_6) : x^2 - x - 3 = 0$
   Le discriminant de (E_6) est $\Delta = (-1)^2 - 4 \times 1 \times (-3) = 1 + 12 = 13 > 0$ donc l'équation a deux solutions réelles :
   $$x_1 = \frac{-(-1)+\sqrt{13}}{2 \times 1} = \frac{1+\sqrt{13}}{2} \qquad \text{et} \qquad x_2 = \frac{-(-1)-\sqrt{13}}{2 \times 1} = \frac{1-\sqrt{13}}{2}$$
   Ainsi, l'ensemble des solutions dans $\mathbb{R}$ de (E_6) est $\left\{\frac{1+\sqrt{13}}{2}, \frac{1-\sqrt{13}}{2}\right\}$.

Tout ce qui précède ne s'applique qu'aux équations de la forme $ax^2 + bx + c = \boxed{0}$. Si, par exemple, on doit résoudre l'équation $3x^2 - 2x + 7 = 9$, il faut s'y ramener en soustayant 9 aux deux membres de l'équation pour obtenir l'équation équivalente $3x^2 - 2x - 2 = 0$.

4) Exemples d'équations se ramenant au second degré

On peut parfois transformer une équation en une équation du second degré par un changement d'inconnue.

Exemple 16 (Équation bicarrée)**.** Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $(E_7) : x^4 - 5x^2 + 6 = 0$.

Pour résoudre (E_7), on va procéder à un changement d'inconnue en posant $X = x^2$. On a alors $X^2 = (x^2)^2 = x^4$ donc (E_7) se réécrit $X^2 - 5X + 6 = 0$. On est donc ramené à résoudre une équation du second degré en X.

Le discriminant est $\Delta = (-5)^2 - 4 \times 1 \times 6 = 1 > 0$ donc l'équation $X^2 - 5X + 6 = 0$ admet deux solutions réelles qui sont :

$$X_1 = \frac{-(-5) - \sqrt{1}}{2 \times 1} = 2 \qquad \text{et} \qquad X_2 = \frac{-(-5) + \sqrt{1}}{2 \times 1} = 3.$$

Il s'ensuit que

$$(E_7) \Leftrightarrow x^2 = 2 \text{ ou } x^2 = 3 \Leftrightarrow x = \sqrt{2} \text{ ou } x = -\sqrt{2} \text{ ou } x = \sqrt{3} \text{ ou } x = -\sqrt{3}.$$

Ainsi, l'ensemble des solutions de (E) est $\{\sqrt{2}, -\sqrt{2}, \sqrt{3}, -\sqrt{3}\}$.

Exemple 17. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $(E_8) : -x + 2\sqrt{x} + 3 = 0$.

Remarquons tout d'abord que l'équation (E_8) a un sens si et seulement si $x \geqslant 0$ en raison de la présence de la racine carrée. On va procéder au changement d'inconnue $X = \sqrt{x}$ car alors $X^2 = x$. Ainsi, (E_8) se réécrit $-X^2 + 2X + 3 = 0$. Le discriminant de cette équation est $\Delta = 2^2 - 4 \times (-1) \times 3 = 16 > 0$ donc elle possède deux solutions réelles :

$$X_1 = \frac{-2 - \sqrt{16}}{2 \times (-1)} = 3 \qquad \text{et} \qquad X_2 = \frac{-2 + \sqrt{16}}{2 \times (-1)} = -1.$$

Ainsi, comme l'équation $\sqrt{x} = -1$ n'a pas de solution réelle,

$$(E_8) \Leftrightarrow \sqrt{x} = 3 \text{ ou } \sqrt{x} = -1 \Leftrightarrow x = 9$$

On conclut que l'ensemble des solutions dans $\mathbb{R}$ de (E_8) est $\{9\}$.

III. — Forme factorisée

Dans tout ce paragraphe, a, b et c sont trois réels tels que $a \neq 0$. On considère la fonction polynôme du second degré $f : x \mapsto ax^2 + bx + c$.

Définition 18

Si elles existent, les solutions réelles de l'équation $f(x) = 0$ sont appelées les racines de f.

On déduit de la démonstration du cas général du paragraphe précédent la propriété suivante.

Propriété 19

On note $\Delta = b^2 - 4ac$ le discriminant de l'équation $f(x) = 0$.

1. Si $\Delta = 0$ alors, pour $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = a(x - x_0)^2$ où x_0 est l'unique racine réelle de f.

2. Si $\Delta > 0$ alors, pour $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$ où x_1 et x_2 sont les deux racines réelles de f.

Dans les deux cas, cette forme s'appelle la forme factorisée de f.

Remarque 20. Si $\Delta < 0$, f n'a pas de forme factorisée dans $\mathbb{R}$.

La forme factorisée présente de nombreux avantages. Il permet notamment de déterminer immédiatement les racines d'une fonction polynôme du second degré.

Exemple 21. On considère la fonction $f : x \mapsto 3(x + 2)(x - 5)$. Alors, les racines de f sont -2 et 5.

Propriété 22

Soit f une fonction du second degré. Alors, la forme factorisée de f est $x \mapsto a(x-x_1)(x-x_2)$ si et seulement si sa forme développée $x \mapsto ax^2 - aSx + aP$ où $S = x_1 + x_2$ est la somme de racines et $P = x_1x_2$ est le produit des racines.

En d'autres termes, la forme développée de f est $x \mapsto ax^2 + bx + c$ si et seulement si $S = -\dfrac{b}{a}$ et $P = \dfrac{c}{a}$.

Démonstration. Pour tout réel x,

$$\begin{aligned} f(x) = a(x-x_1)(x-x_2) &\Leftrightarrow f(x) = a(x^2 - xx_2 - x_1x + x_1x_2) \\ &\Leftrightarrow f(x) = a\left[x^2 - (x_1+x_2)x + x_1x_2\right] \\ &\Leftrightarrow f(x) = ax^2 - a(x_1+x_2)x + a(x_1x_2). \end{aligned}$$

On a donc bien, pour tout réel x, $f(x) = a(x-x_1)(x-x_2)$ si et seulement si $f(x) = ax^2 - aSx + aP$.

Par unicité de la forme développée de f, on en déduit que f s'écrit $x \mapsto ax^2 + bx + c$ si et seulement si $b = -aS$ et $c = aP$ i.e. $S = -\dfrac{b}{a}$ et $P = \dfrac{c}{a}$. □

Cette propriété a plusieurs intérêts.

Exemple 23. *Déterminer la seconde racine de f quand on connaît la première*

On considère la fonction polynôme du second degré $f : x \mapsto 3x^2 - x - 2$. On remarque que la somme des coefficients est nulle $(3 + (-1) + (-2) = 0)$ ce qui équivaut à dire que 1 est racine de f. Or, le produit des racines est $\frac{-2}{3}$ dont l'autre racine de f est $-\frac{2}{3}$ (puisque si on note x_2 cette autre racine alors $1 \times x_2 = -\frac{2}{3}$).

Exemple 24. *Déterminer directement les racines d'un polynôme du second degré*

On considère la fonction polynôme du second degré $f : x \mapsto x^2 - 5x + 6$. D'après la propriété précédente, si ce polynôme a deux racines réelles x_1 et x_2 alors ces nombres sont les seuls à vérifier $x_1 + x_2 = -\frac{-5}{1} = 5$ et $x_1x_2 = 6$. Or, 2 et 3 sont deux nombres qui vérifient $2 + 3 = 5$ et $2 \times 3 = 6$ donc les racines de f sont 2 et 3.

Exemple 25. *Déterminer deux nombres connaissant leur somme et leur produit*

Soit u et v deux réels tels que $u + v = 2$ et $uv = -2$ avec $u < v$. Déterminer u et v.

D'après la propriété précédente, u et v sont les solutions de l'équation (E_9) : $x^2 - 2x - 2 = 0$. Le discriminant de cette équation est $\Delta = (-2)^2 - 4 \times 1 \times (-2) = 12 > 0$ donc l'équation (E_9) a deux solutions réelles qui sont :

$$x_1 = \frac{-(-2) + \sqrt{12}}{2 \times 1} = \frac{2 + 2\sqrt{3}}{2} = 1 + \sqrt{3} \text{ et } x_2 = \frac{-(-2) - \sqrt{12}}{2 \times 1} = \frac{2 - 2\sqrt{3}}{2} = 1 - \sqrt{3}.$$

Ainsi, comme $u < v$, on conclut que $u = 1 - \sqrt{3}$ et $v = 1 + \sqrt{3}$

IV. — Approfondissements

1) Notion générale de fonctions polynômes

Définition 26

Soit $n \in \mathbb{N}$. Une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ est appelée fonction polynôme de degré n s'il existe des réels a_0, a_1, ..., a_n avec $a_n \neq 0$ tels que, pour tout réel x,

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0.$$

Exemple 27.

1. $x \mapsto 7x^3 - 3x^2 + 2x - 1$ est une fonction polynôme de degré 3.
2. $x \mapsto x^5 - 1$ est une fonction polynôme de degré 5.
3. Les fonctions affines non nulles sont les fonctions polynômes de degré 1.
4. Les fonctions polynômes du second degré sont les fonctions polynômes de degré 2.

Remarque 28. Comme pour les fonctions polynômes du second degré, la forme adoptée dans la définition précédente est la forme développée de f et on peut montrer que l'écriture de f sous cette forme est unique.

2) Racines et factorisation

Définition 29

Soit f une fonction polynôme. Lorsqu'elles existent, les solutions réelles de l'équation $f(x) = 0$ d'inconnue x sont appelées les racines de f.

Lemme 30

Soit $r \in \mathbb{R}$ et $k \in \mathbb{N}^*$. Alors, il existe une fonction polynôme h de degré $k-1$ telle que, pour tout réel x,

$$x^k - r^k = (x-r)h(x).$$

Démonstration. Considérons la fonction polynôme

$$h : x \mapsto x^{k-1} + rx^{k-2} + r^2x^{k-3} + \cdots + r^{k-2}x + r^{k-1}.$$

Alors, pour tout réel x,

$$\begin{aligned} xh(x) &= x(x^{k-1} + rx^{k-2} + r^2x^{k-3} + \cdots + r^{k-2}x + r^{k-1}) \\ &= x^k + rx^{k-1} + r^2x^{k-2} + \cdots + r^{k-2}x^2 + r^{k-1}x \\ &= x^k + rx^{k-1} + r^2x^{k-2} + \cdots + r^{k-2}x^2 + r^{k-1}x + r^k - r^k \\ &= x^k + r(x^{k-1} + rx^{k-2} + \cdots + r^{k-2}x + r^{k-1}) - r^k \\ &= x^k + rh(x) - r^k \end{aligned}$$

donc $xh(x) - rh(x) = x^k - r^k$ i.e. $(x-r)h(x) = x^k - r^k$. $\square$

Théorème 31

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit f une fonction polynôme de degré n et r une racine de f. Alors, il existe une fonction polynôme g de degré $n-1$ telle que, pour tout réel x,

$$f(x) = (x-r)g(x).$$

Démonstration. Écrivons la fonction f sous la forme

$$f : x \mapsto a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0.$$

Alors, $f(r) = a_n r^n + a_{n-1}r^{n-1} + \cdots + a_1 r + a_0$ donc, comme $f(r) = 0$, on a, pour tout réel x,

$$\begin{aligned} f(x) = f(x) - f(r) &= a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 - (a_n r^n + a_{n-1}r^{n-1} + \cdots + a_1 r + a_0) \\ &= a_n(x^n - r^n) + a_{n-1}(x^{n-1} - r^{n-1}) + \cdots + a_1(x-r) \end{aligned}$$

Or, d'après le lemme précédent, pour tout entier $k \geqslant 1$, il existe une fonction polynôme h_k de degré k telle que, pour tout réel x, $x^k - r^k = (x-r)h_k(x)$. Ainsi, pour tout réel x,

$$\begin{aligned} f(x) - f(r) &= a_n(x-r)h_n(x) + a_{n-1}(x-r)h_{n-1}(x) + \cdots + a_1(x-r)h_1(x) \\ &= (x-r)\left[\underbrace{a_n h_n(x) + a_{n-1}h_{n-1}(x) + \cdots + a_1 h_1(x)}_{g(x)}\right] \end{aligned}$$

Puisque $a_n \neq 0$ et h_n est une fonction polynôme de degré $n-1$, $a_n h_n$ est une fonction polynôme de degré $n-1$. De plus, toutes les autres fonctions qu'on lui ajoute pour obtenir g sont de degrés strictement inférieurs donc g est une fonction polynôme de degré $n-1$. $\square$

Exemple 32. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $(E) : x^3 - x^2 + x - 1 = 0$.

Considérons la fonction polynôme $f : x \mapsto x^3 - 2x^2 + 2x - 1$. On constate que la somme des coefficients de f est nul $(1 + (-2) + 2 + (-1) = 0)$ ce qui revient à dire que 1 est racine de f. D'après le théorème précédent, il existe donc une fonction polynôme g de degré 2 telle que, pour tout réel x, $f(x) = (x-1)g(x)$. Écrivons g sous forme développée : $g : x \mapsto ax^2 + bx + c$. On a alors, pour tout réel x,

$$f(x) = (x-1)(ax^2+bx+c) = ax^3 + bx^2 + cx - ax^2 - bx - c = ax^3 + (b-a)x^2 + (c-b)x - c$$

Par unicité de la forme développée, on en déduit que

$$a = 1 \qquad b - a = -2 \qquad c - b = 2 \qquad -c = -1.$$

Il s'ensuit que $a = 1$, $b = -2+a = -1$ et $c = 1$. Ainsi, pour tout réel x, $f(x) = (x-1)(x^2-x+1)$.

On en déduit que

$$(E) \Leftrightarrow x - 1 = 0 \text{ ou } x^2 - x + 1 = 0.$$

Or, le discriminant de $x^2 - x + 1 = 0$ est $\Delta = (-1)^2 - 4 \times 1 \times 1 = -3 < 0$ donc cette équation n'a pas de solution dans $\mathbb{R}$.

Ainsi, l'ensemble des solutions de (E) dans $\mathbb{R}$ est $\{1\}$.