SciencesPo

ADMISSION AU COLLEGE UNIVERSITAIRE
Samedi 22 février 2020
MATHEMATIQUES
durée de l'épreuve : 3h – coefficient 2

Le sujet est paginé de 1 à 3. Veuillez vérifier que vous avez bien toutes les pages. En cas d'anomalie, avertissez le surveillant.

L'exercice Vrai-Faux est noté sur 12, le problème est noté sur 8.

Vous devez traiter les deux exercices.

Les calculatrices sont autorisées.

Dans le cas où un candidat repère ce qui lui semble être une erreur typographique, il le signale très lisiblement sur sa copie, propose la correction et poursuit l'épreuve en conséquence. Si cela le conduit à formuler une ou plusieurs hypothèses, il le mentionne explicitement.

Exercice Vrai-Faux

Pour chacune des affirmations suivantes, dire si elle est vraie ou fausse en justifiant soigneusement la réponse.

1. **Affirmation** : le carré d'un nombre réel est toujours supérieur ou égal à ce nombre.

2. **Affirmation** : la suite (u_n) définie pour tout entier n par $u_n = 4^{3n-1}$ est une suite géométrique.

3. On considère la suite géométrique (v_n) de premier terme $v_0 = 3$ et de raison $\frac{2}{3}$ et on pose $S_n = v_0 + v_1 + \cdots + v_n$ pour tout entier naturel non nul n.

Affirmation : la suite (S_n) converge vers 9.

4. Dans le cadre d'un prêt, la première mensualité comprend 350 euros d'intérêts. Chaque mensualité comprend ensuite 2 euros de moins d'intérêts que la précédente.

Affirmation : le montant des intérêts versés après 100 mensualités est de 25 000 euros.

5. Dans une ville où il pleut un jour sur quatre, une personne se rend à son travail à pied ou en voiture. Lorsqu'il pleut, elle se rend à son travail en voiture dans 80% des cas et lorsqu'il ne pleut pas elle y va à pied dans 60% des cas.

Affirmation : cette personne utilise sa voiture pour se rendre à son travail un jour sur deux.

6. Dans un groupe de 120 personnes, 36 sont inscrites dans un club sportif.

Affirmation : la probabilité que deux personnes choisies au hasard dans le groupe soient inscrites dans un club sportif vaut 0,088 à 10^{-3} près.

7. Je lance 10 fois un dé équilibré dont les faces sont numérotées de 1 à 6.

Affirmation : le nombre de fois où j'obtiens la face 3 est égal en moyenne à $\frac{10}{3}$.

8. **Affirmation** : l'équation $2x^3 - 3x^2 + 2 = 0$ admet trois solutions dans $\mathbf{R}$.

9. f désigne la fonction définie sur $]0\,;+\infty[$ par $f(x) = \frac{1}{1+\ln x}$ et C sa courbe représentative dans un repère du plan.

Affirmation : la tangente à C au point d'abscisse 1 est parallèle à la droite d'équation $y = -\frac{1}{4}x$.

10. La fonction g est définie sur $]3\,;+\infty[$ par $g(x) = \frac{2x+1}{x-3}$.

Affirmation : la droite d'équation $y = 2$ est asymptote à la courbe représentative de la fonction g dans un repère du plan.

11. Étant donné un repère du plan, on considère la droite d passant par le point $A(-2\,;1)$ et admettant $\vec{u}\ (2;1)$ pour vecteur directeur.

Affirmation : une équation cartésienne de d est : $x - 2y + 4 = 0$.

12. Les points A, B et C ont pour coordonnées dans un repère orthonormé du plan :
A $(1\,;1)$, B $(a\,;3)$, C $(a+2\,;a+3)$, où a désigne un nombre réel.

Affirmation : les droites (AB) et (AC) ne sont pas perpendiculaires.

Problème

Partie A

La fonction f est définie sur **R** par $f(x) = x\mathrm{e}^{-x}$.

1. a) Déterminer la limite de la fonction f en $-\infty$.
   b) Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$ et donner une interprétation graphique de ce résultat.
2. Après avoir calculé la dérivée de la fonction f, dresser son tableau de variation sur **R** en précisant la valeur exacte du maximum.

Partie B

La suite (u_n) est définie par : $u_0 = 1$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1}=f(u_n)$.

1. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n, u_n est strictement positif.
2. Démontrer que la suite (u_n) est décroissante.
3. a) Démontrer que la suite (u_n) est convergente.
   b) On admet que la limite α de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est solution de l'équation $f(\alpha) = \alpha$. Déterminer la valeur de α.

Partie C

On considère la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie pour tout entier naturel n par :

$$S_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n.$$

1. Dans l'algorithme ci-dessous, u et S désignent des nombres réels et k un nombre entier. Compléter cet algorithme pour qu'à la fin de son exécution la variable S contienne S_{50}.

```
u ← 1
S ← ...
Pour k variant de 1 à ...
    u ← ...
    S ← ...
Fin Pour
```

2. Déterminer la valeur décimale de S_{50} arrondie au millième.