Correction de l'interrogation écrite n°1 — Sujet A

Exercice 1. Comme f est une fonction polynôme du second degré, il existe des réels a, b et c tels que $f : x \mapsto ax^2 + bx + c$. Or, $c = f(0)$ donc $c = 1$. Dès lors, $f(1) = a + b + 1$ et $f(-1) = a - b + 1$ donc $a + b + 1 = -1$ et $a - b + 1 = 1$ i.e. $a + b = -2$ et $a - b = 0$. Cette dernière égalité donne $a = b$ et donc $-2 = a + b = 2a$ i.e. $a = -1$. On conclut que la forme factorisée de f est $\boxed{f : x \mapsto -x^2 - x + 1}$.

Exercice 2.

$f(x) = x^2 - 4x + 1 = (x-2)^2 - 4 + 1$ donc $\boxed{f(x) = (x-2)^2 - 3}$

$g(x) = x^2 - x - 1 = (x - \frac{1}{2})^2 - \frac{1}{4} - 1$ donc $\boxed{g(x) = (x - \frac{1}{2})^2 - \frac{5}{4}}$.

$h(x) = 5x^2 + 6x + 7 = 5(x^2 + \frac{6}{5}x + \frac{7}{5}) = 5\left[(x + \frac{3}{5})^2 - \frac{9}{25} + \frac{35}{25}\right]$ donc $\boxed{h(x) = 5\left[(x + \frac{3}{5})^2 + \frac{26}{25}\right]}$.

Exercice 3. Soit $f : x \mapsto x^2 - 3x + 3$. Écrivons f sous forme canonique :

$$f(x) = \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{9}{4} + \frac{12}{4} = \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}$$

Or, pour tout réel x, $(x - \frac{3}{2})^2 \geqslant 0$ donc $f(x) \geqslant \frac{3}{4}$ et, en particulier, $f(x) > 0$.

Ainsi, $\boxed{\text{pour tout réel } x,\ x^2 - 3x + 3 > 0}$.

Exercice 4.

$(E_1) \Leftrightarrow 9x^2 = 25 \Leftrightarrow x^2 = \frac{25}{9} \Leftrightarrow x = \frac{5}{3}$ ou $x = -\frac{5}{3}$

$\boxed{\text{L'ensemble des solutions de } (E_1) \text{ est } \left\{\frac{5}{3}\,;-\frac{5}{3}\right\}}$.

$(E_2) \Leftrightarrow x(2 - x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ou $2 - x = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ou $x = 2$

$\boxed{\text{L'ensemble des solutions de } (E_2) \text{ est } \{0\,;2\}}$.

$(E_3) \Leftrightarrow (4x)^2 + 2 \times 4x \times 1 + 1^2 = 0 \Leftrightarrow (4x+1)^2 = 0 \Leftrightarrow 4x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{4}$.

$\boxed{\text{L'ensemble des solutions de } (E_3) \text{ est } \left\{-\frac{1}{4}\right\}}$.

$(E_4) :\ 2x^2 + 5x - 3 = 0$

$\Delta = 5^2 - 4 \times 2 \times (-3) = 25 + 24 = 49 > 0$ donc (E_4) a deux solutions réelles :

$$x_1 = \frac{-5 - \sqrt{49}}{2 \times 2} = \frac{-5-7}{4} = -3 \text{ et } x_2 = \frac{-5 + \sqrt{49}}{2 \times 2} = \frac{-5+7}{4} = \frac{1}{2}$$

$\boxed{\text{L'ensemble des solutions de } (E_4) \text{ est } \left\{-3\,;\frac{1}{2}\right\}}$.

$(E_5) :\ 2x^2 + x + 3 = 0$

$\Delta = 1^2 - 4 \times 2 \times 3 = 1 - 24 = -23 < 0$ donc $\boxed{\text{l'ensemble des solutions de } (E_5) \text{ dans } \mathbb{R} \text{ est } \varnothing}$.

$(E_6) :\ x^2 + (\sqrt{3} - 1)x - \sqrt{3} = 0$

$\Delta = (\sqrt{3} - 1)^2 - 4 \times 1 \times (-\sqrt{3}) = \sqrt{3}^2 - 2\sqrt{3} + 1 + 4\sqrt{3} = \sqrt{3}^2 + 2\sqrt{3} + 1 = (\sqrt{3} + 1)^2 > 0$ donc (E_6) a deux solutions réelles :

$$x_1 = \frac{-(\sqrt{3} - 1) - \sqrt{(\sqrt{3}+1)^2}}{2 \times 1} = \frac{-\sqrt{3} + 1 - \sqrt{3} - 1}{2} = -\sqrt{3}$$

et

$$x_2 = \frac{-(\sqrt{3} - 1) + \sqrt{(\sqrt{3}+1)^2}}{2 \times 1} = \frac{-\sqrt{3} + 1 + \sqrt{3} + 1}{2} = 1$$

$\boxed{\text{L'ensemble des solutions de } (E_4) \text{ est } \left\{-\sqrt{3}\,;1\right\}}$.

Correction de l'interrogation écrite n°1 — Sujet B

Exercice 1. Comme f est une fonction polynôme du second degré, il existe des réels a, b et c tels que $f : x \mapsto ax^2 + bx + c$. Or, $c = f(0)$ donc $c = -1$. Dès lors, $f(1) = a + b - 1$ et $f(-1) = a - b - 1$ donc $a + b - 1 = -1$ et $a - b - 1 = 1$ i.e. $a + b = 0$ et $a - b = 2$. On en déduit que $a = -b$ et $-2b = a - b = 2$ i.e. $b = -1$ et donc $a = 1$. On conclut que la forme factorisée de f est $\boxed{f : x \mapsto x^2 - x - 1}$.

Exercice 2.

$f(x) = x^2 - 6x + 1 = (x - 3)^2 - 9 + 1$ donc $\boxed{f(x) = (x - 3)^2 - 8}$

$g(x) = x^2 - x - 3 = (x - \frac{1}{2})^2 - \frac{1}{4} - 3$ donc $\boxed{g(x) = (x - \frac{1}{2})^2 - \frac{13}{4}}$.

$h(x) = 7x^2 + 6x + 5 = 7(x^2 + \frac{6}{7}x + \frac{5}{7}) = 7\left[(x + \frac{3}{7})^2 - \frac{9}{49} + \frac{35}{49}\right]$ donc $\boxed{h(x) = 7\left[(x + \frac{3}{7})^2 + \frac{26}{49}\right]}$.

Exercice 3. Soit $f : x \mapsto x^2 - 3x + 4$. Écrivons f sous forme canonique :

$$f(x) = \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{9}{4} + \frac{16}{4} = \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{7}{4}$$

Or, pour tout réel x, $(x - \frac{3}{2})^2 \geqslant 0$ donc $f(x) \geqslant \frac{7}{4}$ et, en particulier, $f(x) > 0$.

Ainsi, $\boxed{\text{pour tout réel } x,\ x^2 - 3x + 4 > 0}$.

Exercice 4.

$(E_1) \Leftrightarrow 25x^2 = 9 \Leftrightarrow x^2 = \frac{9}{25} \Leftrightarrow x = \frac{3}{5}$ ou $x = -\frac{3}{5}$

$\boxed{\text{L'ensemble des solutions de } (E_1) \text{ est } \left\{\frac{3}{5}\,;-\frac{3}{5}\right\}}$.

$(E_2) \Leftrightarrow x(3 - x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ou $3 - x = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ou $x = 3$

$\boxed{\text{L'ensemble des solutions de } (E_2) \text{ est } \{0\,;3\}}$.

$(E_3) \Leftrightarrow (5x)^2 + 2 \times 5x \times 1 + 1^2 = 0 \Leftrightarrow (5x + 1)^2 = 0 \Leftrightarrow 5x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{5}$.

$\boxed{\text{L'ensemble des solutions de } (E_3) \text{ est } \left\{-\frac{1}{5}\right\}}$.

$(E_4) :\ 3x^2 + 5x - 2 = 0$

$\Delta = 5^2 - 4 \times 3 \times (-2) = 25 + 24 = 49 > 0$ donc (E_4) a deux solutions réelles :

$$x_1 = \frac{-5 - \sqrt{49}}{2 \times 3} = \frac{-5 - 7}{3} = -2 \text{ et } x_2 = \frac{-5 + \sqrt{49}}{2 \times 3} = \frac{-5 + 7}{6} = \frac{1}{3}$$

$\boxed{\text{L'ensemble des solutions de } (E_4) \text{ est } \left\{-2\,;\frac{1}{3}\right\}}$.

$(E_5) :\ 3x^2 + x + 2 = 0$

$\Delta = 1^2 - 4 \times 3 \times 2 = 1 - 24 = -23 < 0$ donc $\boxed{\text{l'ensemble des solutions de } (E_5) \text{ dans } \mathbb{R} \text{ est } \varnothing}$.

$(E_6) :\ x^2 + (\sqrt{5} - 1)x - \sqrt{5} = 0$

$\Delta = (\sqrt{5} - 1)^2 - 4 \times 1 \times (-sqrt5) = sqrt5^2 - 2\sqrt{5} + 1 + 4\sqrt{5} = \sqrt{5}^2 + 2\sqrt{5} + 1 = (\sqrt{5} + 1)^2 > 0$ donc (E_6) a deux solutions réelles :

$$x_1 = \frac{-(\sqrt{5} - 1) - \sqrt{(\sqrt{5} + 1)^2}}{2 \times 1} = \frac{-\sqrt{5} + 1 - \sqrt{5} - 1}{2} = -\sqrt{5}$$

et

$$x_2 = \frac{-(\sqrt{5} - 1) + \sqrt{(\sqrt{5} + 1)^2}}{2 \times 1} = \frac{-\sqrt{5} + 1 + \sqrt{5} + 1}{2} = 1$$

$\boxed{\text{L'ensemble des solutions de } (E_6) \text{ est } \left\{-\sqrt{5}\,;1\right\}}$.