Corrigé du devoir à la maison n°1

Exercice 1. Commençons par remarquer de (E_m) est une équation du second degré si et seulement si $m-3\neq 0$ i.e. $m\neq 3$.

Ensuite, pour tout réel $m\neq 3$, le discriminant de (E_m) est

$$\begin{aligned}\Delta_m &= (m+2)^2-4(m-3)(m+5) = m^2+4m+4-4(m^2+5m-3m-15)\\ &= m^2+4m+4-4m^2-8m+60 = -3m^2-4m+64.\end{aligned}$$

Ainsi, l'équation (E_m) possède une unique solution réelle si et seulement si $-3m^2-4m+64=0$. On est donc ramené à résoudre l'équation du seconde degré $(F) : -3x^2-4x+64=0$.

Le discriminant de (F) est $(-4)^2-4\times(-3)\times 64 = 16+768=784$ donc (F) possède deux solutions réelles :

$$x_1=\frac{-(-4)-\sqrt{784}}{2\times(-3)}=4 \qquad \text{et} \qquad x_2=\frac{-(-4)+\sqrt{784}}{2\times(-3)}=-\frac{16}{3}.$$

Comme aucun de ces solutions n'est égale à 3, on conclut que $\boxed{\mathcal{D}=\{4,-\frac{16}{3}\}}$.

Si $m=4$, l'équation (E_m) devient $x^2+6x+9=0$ i.e. $(x+3)^2=0$ donc l'unique solution de (E_m) est -3 et, si $m=-\frac{16}{3}$, l'équation (E_m) devient $-\frac{25}{3}x^2+\frac{10}{3}x-\frac{1}{3}=0$ qui équivaut, en multipliant par -3 à $25x^2-10x+1=0$ i.e. $(5x-1)^2=0$ donc l'unique solution de (E_m) est $\frac{1}{5}$.

On pouvait aussi utiliser le fait que lorsque $\Delta_m=0$, l'unique solution de (E_m) est $-\frac{m+2}{2(m-3)}$. Pour $m=4$, on trouve $-\frac{6}{2}=-3$ et, pour $m=-\frac{16}{3}$, on trouve $-\frac{-\frac{10}{3}}{-\frac{50}{3}}=\frac{1}{5}$.

Exercice 2.

1. Soit a et b deux réels. Alors,

$$(a+b)^3=(a+b)^2(a+b)=(a^2+2ab+b^2)(a+b)=a^3+a^2b+2a^2b+2ab^2+b^2a+b^3$$

et donc $\boxed{(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3}$.

2. Soit $x\in\mathbb{R}$. Alors,

$$\begin{aligned}f(x-1) &= 8(x-1)^3+24(x-1)^2+96(x-1)+43\\ &= 8(x+(-1))^3+24(x^2-2x+1)+96x-96+43\\ &= 8(x^3+3x^2(-1)+3x(-1)^2+(-1)^3)+24x^2-48x+24+96x-53\\ &= 8x^3-24x^2+24x-8+24x^2+48x-29\end{aligned}$$

i.e. $\boxed{f(x-1)=8x^3+72x-37}$.

3. a. Par hypothèse, $8r^3+72r-37=0$ donc $8(u+v)^3+72(u+v)-37=0$. Or,

$$\begin{aligned}8(u+v)^3+72(u+v)-37 &= 8(u^3+3u^2v+3uv^2+v^3)+72(u+v)-37\\ &= 8(u^3+v^3)+24uv(u+v)+72(u+v)-37\\ &= 8(u^3+v^3)+(24uv+72)(u+v)-37\end{aligned}$$

donc $8(u^3+v^3)+(24uv+72)(u+v)-37=0$ et, en divisant par 8, il vient $\boxed{u^3+v^3+(3uv+9)(u+v)-\frac{37}{8}=0}$.

b. Comme $uv=-3$, $3uv+9=0$ donc $\boxed{u^3+v^3=\frac{37}{8}}$.

c. Par théorème, s et t sont solutions de l'équation $(F) : x^2 - \frac{37}{8}x - 27 = 0$. Le discriminant de cette équation est

$$\Delta = \left(-\frac{37}{8}\right)^2 - 4 \times 1 \times (-27) = \frac{8281}{64} > 0$$

donc (F) possède deux solutions réelles qui sont :

$$x_1 = \frac{-(-\frac{37}{8}) - \sqrt{\frac{8281}{64}}}{2} = \frac{\frac{37}{8} - \frac{91}{8}}{2} = -\frac{27}{8}$$

et

$$x_2 = \frac{-(-\frac{37}{8}) + \sqrt{\frac{8281}{64}}}{2} = \frac{\frac{37}{8} + \frac{91}{8}}{2} = 8.$$

Comme $s < t$, on conclut que $\boxed{s = -\frac{27}{8} \text{ et } t = 8}$.

d. D'après les questions précédentes, $u^3 + v^3 = \frac{37}{8}$ et $uv = -3$ donc $u^3v^3 = (uv)^3 = (-3)^3 = -27$. Ainsi, u^3 et v^3 sont deux réels dont la somme vaut $\frac{37}{8}$ et le produit vaut -27. On déduit donc de la question précédente, comme $u^3 < v^3$ (par croissante de la fonction cube sur $\mathbb{R}$), que $u^3 = -\frac{27}{8}$ et $v^3 = 8$. Il s'ensuit que $\boxed{u = -\frac{3}{2} \text{ et } v = 2}$. Dès lors, comme $r = u + v$, $\boxed{r = \frac{1}{2}}$.

4. D'après la question précédente, $\frac{1}{2}$ peut être une solution de $8x^3 + 72x - 37 = 0$ et on vérifie qu'effectivement $8(\frac{1}{2})^3 + 72(\frac{1}{2}) - 37 = 1 + 36 - 37 = 0$. Autrement dit, d'après la question **2.**, $\frac{1}{2}$ est solution de $f(x-1) = 0$. Ainsi, $f(\frac{1}{2} - 1) = 0$ i.e. $f(-\frac{1}{2}) = 0$. On conclut donc que $\boxed{-\frac{1}{2} \text{ est solution de } (E)}$.

5. Étant donné que $-\frac{1}{2}$ est racine de f, il existe des réels a, b et c tels que, pour tout réel x,

$$f(x) = \left(x + \frac{1}{2}\right)(ax^2 + bx + c).$$

Or, pour tout réel x,

$$\begin{aligned}\left(x + \frac{1}{2}\right)(ax^2 + bx + c) &= ax^3 + bx^2 + cx + \frac{a}{2}x^2 + \frac{b}{2}x + \frac{c}{2} \\ &= ax^3 + \left(b + \frac{a}{2}\right)x^2 + \left(c + \frac{b}{2}\right)x + \frac{c}{2}\end{aligned}$$

donc, par unicité de la forme développée,

$$a = 8 \qquad b + \frac{a}{2} = 24 \qquad c + \frac{b}{2} = 96 \qquad \frac{c}{2} = 43$$

i.e.

$$a = 8 \qquad b = 20 \qquad b = 20 \qquad c = 86.$$

Ainsi, pour tout réel x, $f(x) = \left(x + \frac{1}{2}\right)(8x^2 + 20x + 86)$. Dès lors,

$$(E) \Leftrightarrow x = -\frac{1}{2} \text{ ou } 8x^2 + 20x + 86 = 0.$$

Or, le discriminant de $8x^2 + 20x + 86$ est $\Delta = 20^2 - 4 \times 8 \times 86 = -2352 < 0$ donc ce trinôme n'a pas de racine réelle.
Ainsi, on conclut que $\boxed{-\frac{1}{2} \text{ est l'unique racine réelle de } (E)}$.