Devoir à la maison n°1

À rendre le mardi 24 septembre 2019

Exercice 1. Déterminer l'ensemble $\mathcal{D}$ des réels m tels que l'équation

$$(E_m) : (m-3)x^2 + (m+2)x + m + 5 = 0$$

soit une équation du second degré qui admette exactement une solution réelle et déterminer, pour tout $m \in \mathcal{D}$, cette unique solution.

Exercice 2. Le but de l'exercice est de résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation

$$(E) : 8x^3 + 24x^2 + 96x + 43 = 0.$$

1. Montrer que, pour tous réels a et b,

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3.$$

2. On considère la fonction $f : x \mapsto 8x^3 + 24x^2 + 96x + 43$.
Calculer, pour tout réel x, $f(x-1)$ (sous forme développée, réduite et ordonnée).

3. On considère l'équation

$$(F) : 8x^3 + 72x - 37 = 0.$$

On suppose que r est une solution de (F) et on considère deux réels u et v tels que $r = u + v$ et $u < v$.

a. Montrer que $u^3 + v^3 + (3uv + 9)(u + v) - \frac{37}{8} = 0$.

b. On suppose de plus que $uv = -3$. En déduire la valeur de $u^3 + v^3$.

c. Soit s et t deux réels tels que $s + t = \frac{37}{8}$, $st = -27$ et $s < t$. Déterminer s et t.

d. En déduire les valeurs de u et v puis celle de r.

4. En utilisant les questions précédentes, déterminer une solution de (E).

5. L'équation (E) a-t-elle d'autres solutions dans $\mathbb{R}$?