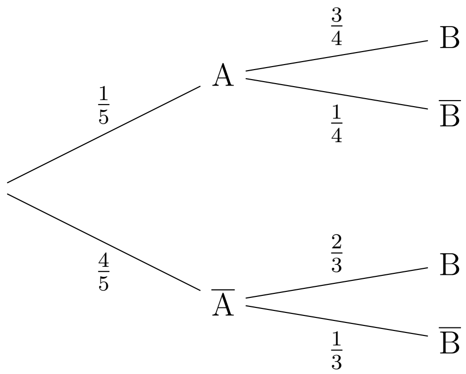
Correction de l'interrogation écrite n°2 — Sujet A

Exercice 1.

1. $P(\overline{A}) = 1 - P(A) = 0{,}4$ et $P(\overline{B}) = 1 - P(B) = 0{,}5$.
2. $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0{,}6 + 0{,}5 - 0{,}3 = 0{,}8$.
3. $P_A(B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(A)} = \dfrac{0{,}3}{0{,}6} = 0{,}5$ et $P_B(A) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)} = \dfrac{0{,}3}{0{,}5} = 0{,}6$.
4. $P_A(\overline{B}) = 1 - P_A(B) = 0{,}5$ et $P_B(\overline{A}) = 1 - P_B(A) = 0{,}4$.

Exercice 2.

1. On peut représenter l'expérience par l'arbre suivant.



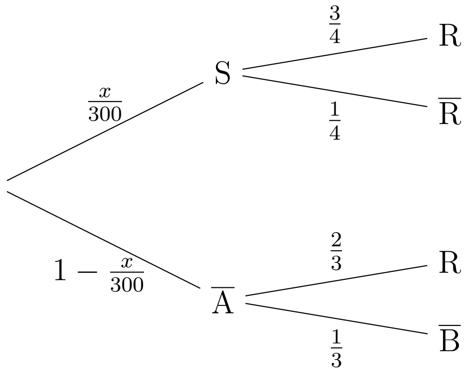
2. Si l'étudiant choisi a suivi le stage, la probabilité qu'il n'ait pas réussi ses examens est $P_{\mathrm{A}}(\overline{\mathrm{B}}) = 1 - P_{\mathrm{A}}(\mathrm{B}) = 1 - \frac{3}{4}$ i.e. $\boxed{P_{\mathrm{A}}(\overline{\mathrm{B}}) = \frac{1}{4}}$.
3. La probabilité que l'étudiant choisi ait suivi le stage et réussi ses examens est $P(\mathrm{A} \cap \mathrm{B}) = P(\mathrm{A})P_{\mathrm{A}}(\mathrm{B}) = \frac{1}{5} \times \frac{3}{4}$ i.e. $\boxed{P(\mathrm{A} \cap \mathrm{B}) = \frac{3}{20}}$.
4. Les évènements A et $\overline{\mathrm{A}}$ forment une partition de l'univers. D'après la formule des probabilités totales,

$$P(\mathrm{B}) = P(\mathrm{A})P_{\mathrm{A}}(\mathrm{B}) + P(\overline{\mathrm{A}})P_{\overline{\mathrm{A}}}(\mathrm{B}) = \frac{1}{5} \times \frac{3}{4} + \frac{4}{5} \times \frac{2}{3}$$

   i.e. $\boxed{P(\mathrm{B}) = \frac{41}{60}}$.
5. Sachant que l'étudiant choisi a réussi ses examens, la probabilité qu'il ait suivi le stage est

$$P_{\mathrm{B}}(\mathrm{A}) = \frac{P(\mathrm{A} \cap \mathrm{B})}{P(\mathrm{B})} = \frac{\frac{3}{20}}{\frac{41}{60}} = \frac{3}{20} \times \frac{60}{41}$$

   i.e. $\boxed{P_{\mathrm{B}}(\mathrm{A}) = \frac{9}{41} \approx 0{,}22}$.
6. Notons x le nombre de places au stage. Si toutes ces places sont occupées par des étudiants, la probabilité qu'un étudiant pris au hasard suive le stage est $\frac{x}{300}$. On a donc l'arbre suivant :



En raisonnant comme dans la question 4, la probabilité qu'un étudiant pris au hasard réussisse l'examen est alors

$$P(\text{B}) = \frac{x}{300} \times \frac{3}{4} + \left(1 - \frac{x}{300}\right) \times \frac{2}{3} = \frac{x}{400} + \frac{2}{3} - \frac{2x}{900} = \frac{x}{3600} + \frac{2}{3}$$

On cherche x tel que $P(\text{B}) \geqslant \frac{70}{100}$. Or,

$$P(\text{B}) \geqslant \frac{70}{100} \Leftrightarrow \frac{x}{3600} + \frac{2}{3} \geqslant \frac{70}{100} \Leftrightarrow \frac{x}{3600} \geqslant \frac{70}{100} - \frac{2}{3} \Leftrightarrow \frac{x}{3600} \geqslant \frac{1}{30} \Leftrightarrow x \geqslant \frac{3600}{30} \Leftrightarrow x \geqslant 120.$$

Ainsi, <u>pour espérer atteindre au moins 70% de réussite, il faut que l'université prévoit au moins 120 places lors du stage</u>.

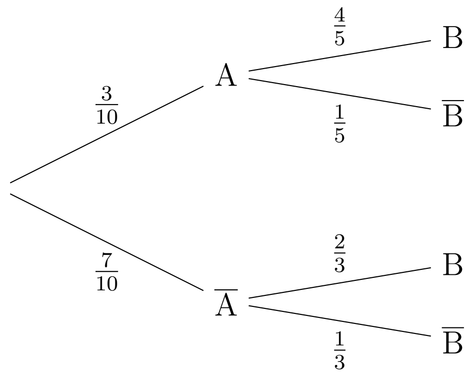
Correction de l'interrogation écrite n°2 — Sujet B

Exercice 1.

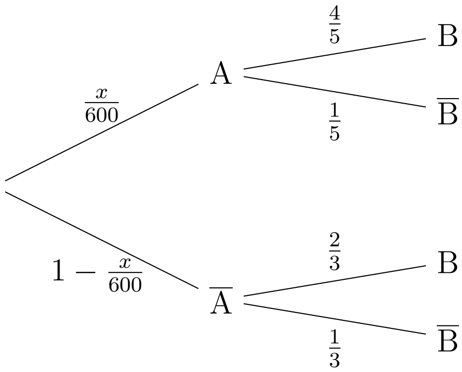
1. $P(\overline{A}) = 1 - P(A) = 0{,}2$ et $P(\overline{B}) = 1 - P(B) = 0{,}5$.
2. $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0{,}8 + 0{,}5 - 0{,}4 = 0{,}9$.
3. $P_A(B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(A)} = \dfrac{0{,}4}{0{,}8} = 0{,}5$ et $P_B(A) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)} = \dfrac{0{,}4}{0{,}5} = 0{,}8$.
4. $P_A(\overline{B}) = 1 - P_A(B) = 0{,}5$ et $P_B(\overline{A}) = 1 - P_B(A) = 0{,}2$.

Exercice 2.

1. On peut représenter l'expérience par l'arbre suivant.



2. Si l'étudiant choisi a suivi le stage, la probabilité qu'il n'ait pas réussi ses examens est $P_{\mathrm{A}}(\overline{\mathrm{B}}) = 1 - P_{\mathrm{A}}(\mathrm{B}) = 1 - \frac{4}{5}$ i.e. $\boxed{P_{\mathrm{B}}(\overline{\mathrm{B}}) = \frac{1}{5}}$.
3. La probabilité que l'étudiant choisi ait suivi le stage et réussi ses examens est $P(\mathrm{A} \cap \mathrm{B}) = P(\mathrm{A})P_{\mathrm{A}}(\mathrm{B}) = \frac{3}{10} \times \frac{4}{5}$ i.e. $\boxed{P(\mathrm{A} \cap \mathrm{B}) = \frac{6}{25}}$.
4. Les évènements A et $\overline{\mathrm{A}}$ forment une partition de l'univers. D'après la formule des probabilités totales,
$$P(\mathrm{B}) = P(\mathrm{A})P_{\mathrm{A}}(\mathrm{B}) + P(\overline{\mathrm{A}})P_{\overline{\mathrm{A}}}(\mathrm{B}) = \frac{3}{10} \times \frac{4}{5} + \frac{7}{10} \times \frac{2}{3}$$
i.e. $\boxed{P(\mathrm{B}) = \frac{53}{75}}$.
5. Sachant que l'étudiant choisi a réussi ses examens, la probabilité qu'il ait suivi le stage est
$$P_{\mathrm{B}}(\mathrm{A}) = \frac{P(\mathrm{A} \cap \mathrm{B})}{P(\mathrm{B})} = \frac{\frac{6}{25}}{\frac{53}{75}} = \frac{6}{25} \times \frac{53}{75}$$
i.e. $\boxed{P_{\mathrm{B}}(\mathrm{A}) = \frac{18}{53} \approx 0{,}34}$.
6. Notons x le nombre de places au stage. Si toutes ces places sont occupées par des étudiants, la probabilité qu'un étudiant pris au hasard suive le stage est $\frac{x}{600}$. On a donc l'arbre suivant :



En raisonnant comme dans la question 4, la probabilité qu'un étudiant pris au hasard réussisse l'examen est alors

$$P(\text{B}) = \frac{x}{600} \times \frac{4}{5} + \left(1 - \frac{x}{600}\right) \times \frac{2}{3} = \frac{x}{750} + \frac{2}{3} - \frac{x}{900} = \frac{x}{4500} + \frac{2}{3}$$

On cherche x tel que $P(\text{B}) \geqslant \frac{75}{100}$. Or,

$$P(\text{B}) \geqslant \frac{75}{100} \Leftrightarrow \frac{x}{4500}+\frac{2}{3} \geqslant \frac{75}{100} \Leftrightarrow \frac{x}{4500} \geqslant \frac{75}{100}-\frac{2}{3} \Leftrightarrow \frac{x}{4500} \geqslant \frac{1}{12} \Leftrightarrow x \geqslant \frac{4500}{12} \Leftrightarrow x \geqslant 375.$$

Ainsi, <u>pour espérer atteindre au moins 75% de réussite, il faut que l'université prévoit au moins 375 places lors du stage</u>.