Corrigé du devoir à la maison n°5

Exercice 1.

1. Remarquons que, pour tout réel x, $u^2(x) = x^2+1$ donc $(u^2)'(x) = 2x$. D'autre part, par théorème, pour tout réel x, $(u^2)'(x) = 2u'(x)u(x) = 2u'(x)\sqrt{x^2+1}$. Ainsi, pour tout réel x, $2u'(x)\sqrt{x^2+1} = 2x$ donc $u'(x) = \frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}$. On conclut donc que, $\boxed{\text{pour tout réel } x,\ u'(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}}$.

2. On considère la fonction $f : x \mapsto \dfrac{(x^2-2)\sqrt{x^2+1}}{3}$ définie sur $\mathbb{R}$.

a. Pour tout réel x, $f(x) = \frac{1}{3}(x^2-2)\sqrt{x^2+1}$ donc f est le produit de la fonction polynôme $x \mapsto \frac{13}{(}x^2-2)$ et de la fonction u qui sont toutes les deux dérivables sur $\mathbb{R}$ donc $\boxed{f \text{ est dérivable sur } \mathbb{R}}$ De plus, pour pour tout réel x,

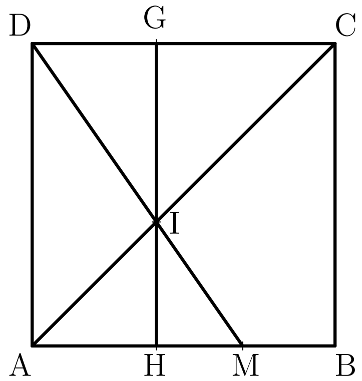
$$\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{1}{3} \times 2x \times \sqrt{x^2+1} + \frac{1}{3}(x^2-2) \times \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} \\
&= \frac{2x\sqrt{x^2+1}}{3} + \frac{x(x^2-2)}{3\sqrt{x^2+1}} \\
&= \frac{2x\sqrt{x^2+1}^2}{3\sqrt{x^2+1}} + \frac{x(x^2-2)}{3\sqrt{x^2+1}} \\
&= \frac{2x(x^2+1) + x(x^2-2)}{3\sqrt{x^2+1}} \\
&= \frac{2x^3+2x+x^3-2x}{3\sqrt{x^2+1}} \\
&= \frac{3x^3}{3\sqrt{x^2+1}}
\end{aligned}$$

et donc, $\boxed{\text{pour tout réel } x,\ f'(x) = \dfrac{x^3}{\sqrt{x^2+1}}}$.

b. Pour tout réel x, $\sqrt{x^2+1} > 0$ donc le signe de $f'(x)$ est le signe de x^3. Or, $x^3 \leqslant 0$ si $x \leqslant 0$ et $x^3 \geqslant 0$ si $x \geqslant 0$. De plus $x^3 = 0$ si et seulement si $x = 0$ donc on conclut que $\boxed{f \text{ est strictement décroissante sur }]-\infty\,;0] \text{ et strictement croissante sur } [0\,;+\infty[}$.

Exercice 2.

1.



2. Comme M est un point quelconque du segment [AB], x varie dans $[0\,;4]$. Ainsi, l'ensemble de définition de f est $\boxed{\mathcal{D}_f = [0\,;4]}$.

3. On pose $h = IH$.

a. Les droites (AM) et (CD) sont parallèles et les droites (DM) et (AC) sont sécantes en I donc, en utilisant le théorème de Thalès dans les triangles IAM et IDC, on obtient $\dfrac{IM}{I\text{D}} = \dfrac{\text{A}M}{\text{CD}} = \dfrac{x}{4}$.

Les droites (HM) et (DG) sont parallèles et les droites (DM) et (GH) sont sécantes en I donc, en utilisant le théorème de Thalès dans les triangles IHM et IDG, on obtient $\dfrac{IM}{I\text{D}} = \dfrac{IH}{\text{IG}} = \dfrac{h}{4-h}$. Ainsi, on conclut que $\boxed{\dfrac{h}{4-h} = \dfrac{x}{4}}$.

b. En utilisant les produits en croix, on en déduit que $4h = x(4-h) = 4x - xh$ donc $4h + xh = 4x$ i.e. $h(4+x) = 4x$ et ainsi $\boxed{h = \dfrac{4x}{x+4}}$.

4. On déduit des questions précédentes que, pour tout $x \in \mathcal{D}_f$,

$$\begin{aligned}
f(x) &= \frac{\text{A}M \times IH}{2} + \frac{\text{CD} \times IG}{2} = \frac{xh}{2} + \frac{4(4-h)}{2} = \frac{xh + 16 - 4h}{2} \\
&= \frac{1}{2}\left(x \times \frac{4x}{x+4} + 16 - 4 \times \frac{4x}{x+4}\right) \\
&= \frac{1}{2} \times \frac{4x^2 + 16(x+4) - 16x}{x+4} \\
&= \frac{1}{2} \times \frac{4x^2 + 16x + 64 - 16x}{x+4} \\
&= \frac{1}{2} \times \frac{4(x^2+16)}{x+4}
\end{aligned}$$

et donc, $\boxed{\text{pour tout } x \in \mathcal{D}_f,\ f(x) = \dfrac{2(x^2+16)}{x+4}}$.

5. La fonction f est le quotient des deux fonctions polynômes $u : x \mapsto 2(x^2+16)$ et $v : x \mapsto x + 4$ toutes deux dérivables sur $\mathcal{D}_f$. De plus, v ne s'annule par sur $\mathcal{D}_f$ sont $f = \frac{u}{v}$ est dérivable sur $\mathcal{D}_f$. De plus, pour tout $x \in \mathcal{D}f$, $u'(x) = 4x$ et $v'(x) = 1$ donc, pour tout $x \in \mathcal{D}_f$,

$$f'(x) = \frac{4x(x+4) - 2(x^2+16) \times 1}{(x+4)^2} = \frac{4x^2 + 16x - 2x^2 - 32}{(x+4)^2} = \frac{2x^2 + 16x - 32}{(x+4)^2}$$

et donc, $\boxed{\text{pour tout } x \in \mathcal{D}_f,\ f'(x) = \dfrac{2(x^2+8x-16)}{(x+4)^2}}$.

6. Pour tout $x \in \mathcal{D}_f$, $(x+4)^2 > 0$et $2 > 0$ donc le signe $f'(x)$ est le signe du trinôme $P(x) = x^2 + 8x - 16$.

Le discriminant de ce trinôme est $\Delta = 8^2 - 4 \times 1 \times (-16) = 128$ donc $P(x)$ a deux racines réelles :

$$x_1 = \frac{-8 - \sqrt{128}}{2 \times 1} = \frac{-8 - 8\sqrt{2}}{2} = -4 - 4\sqrt{2}$$

et

$$x_2 = \frac{-8 + \sqrt{128}}{2 \times 1} = \frac{-8 + 8\sqrt{2}}{2} = -4 + 4\sqrt{2}$$

Comme $a = 1 > 0$, on en déduit que $P(x) \geqslant 0$ pour tout $x \in \left]-\infty\,;-4-4\sqrt{2}\right] \cup \left[-4+4\sqrt{2}\,;+\infty\right[$ et $P(x) \leqslant 0$ pour tout $x \in \left[-4-4\sqrt{2}\,;-4+4\sqrt{2}\right]$. Comme f est définie seulement si $[0\,;4]$, on en déduit que $f'(x) \leqslant 0$ si $x \in \left[0\,;-4+4\sqrt{2}\right]$ et $f'(x) \geqslant 0$ si $x \in \left[-4+4\sqrt{2}\,;4\right]$.

On conclut donc que $\boxed{f \text{ est décroissante sur } \left[0\,;-4+4\sqrt{2}\right] \text{ et croissante sur } \left[-4+4\sqrt{2}\,;4\right]}$.

7. Ainsi, f admet un minimum global en $-4+4\sqrt{2}$ donc <u>l'aire totale recouverte par les triangles AMI et DIC est minimale si et seulement si A$M = -4+4\sqrt{2}$</u>.