Devoir à la maison n°5

À rendre le mardi 25 février 2020

Exercice 1.

1. On considère la fonction $u : x \mapsto \sqrt{x^2+1}$ définie sur $\mathbb{R}$. On admet que u est dérivable sur $\mathbb{R}$.
En dérivant de deux façons différentes la fonction u^2, montrer que, pour tout réel x,

$$u'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}.$$

2. On considère la fonction $f : x \mapsto \dfrac{(x^2-2)\sqrt{x^2+1}}{3}$ définie sur $\mathbb{R}$.

a. Justifier que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et montrer que, pour tout réel x,

$$f'(x) = \frac{x^3}{\sqrt{x^2+1}}.$$

b. Étudier les variations de f sur $\mathbb{R}$.

Exercice 2. On considère un carré ABCD de côté 4 cm.

On note M un point quelconque du segment [AB] et on pose $x = \mathrm{A}M$.

Les segments [AC] et [DM] se coupent en un point I. On note H le pied de la hauteur issue de I dans le triangle AMI et G le pied de la hauteur issue de I dans le triangle DIC.

On considère la fonction f qui à x associe l'aire totale recouverte par les deux triangles AMI et DIC.

1. Faire une figure.

2. Quel est l'ensemble de définition $\mathcal{D}_f$ de la fonction f ?

3. On pose $h = IH$.

a. En utilisant deux fois le théorème de Thalès, montrer que $\dfrac{h}{4-h} = \dfrac{x}{4}$.

b. En déduire que $h = \dfrac{4x}{x+4}$.

4. Montrer que, pour tout $x \in \mathcal{D}_f$,

$$f(x) = \frac{2(x^2+16)}{x+4}.$$

5. Justifier que f est dérivable sur $\mathcal{D}_f$ et montrer que, pour tout $x \in \mathcal{D}_f$,

$$f'(x) = \frac{2(x^2+8x-16)}{(x+4)^2}.$$

6. Étudier les variations de f sur $\mathcal{D}_f$.

7. Déterminer la position de M sur [AB] telle que l'aire totale recouverte par les triangles AMI et DIC soit minimale.