Corrigé du devoir à la maison n°4

Exercice 1 (116 p. 60).

1. Le discriminant de (E_a) est $\Delta_a = (2-a)^2 - 4\times(-a-3) = 4-4a+a^2+4a+12 = a^2+16 > 0$ donc l'équation (E_a) possède deux solutions réelles x_1 et x_2.
2. Par théorème, $x_1+x_2 = -\frac{2-a}{1}$ donc $\boxed{x_1+x_2 = a-2}$ et $x_1x_2 = \frac{-a-3}{1}$ donc $\boxed{x_1x_2 = -a-3}$.
3. Remarquons que $(x_1+x_2)^2 = x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2$ donc $x_1^2 + x_2^2 = (x_1+x_2)^2 - 2x_1x_2$. Ainsi, $x_1^2 + x_2^2 = (a-2)^2 - 2(-a-3) = a^2 - 4a + 4 + 2a + 6$ i.e. $\boxed{x_1^2 + x_2^2 = a^2 - 2a + 10}$.
4. La fonction $a \mapsto a^2 - 2a + 10$ est une fonction polynôme du second degré dont le coefficient dominant est $1 > 0$. Elle atteint donc son minimum en $a = -\frac{-2}{2\times 1} = 1$. Ainsi, la somme de carrés des racines de (E_a) est minimum si et seulement si $a = 1$.
   Dans ce cas, l'équation est $(E_1) : x^2 + x - 4 = 0$. Le discriminant de (E_1) est $\Delta_1 = 1^2 + 16 = 17$ donc les solutions de (E_1) sont $\boxed{x_1 = \frac{-1-\sqrt{17}}{2} \text{ et } x_2 = \frac{-1+\sqrt{17}}{2}}$.

Exercice 2 (Bilan 6 p. 67).

1. Si on prend la définition du cours, la forme canonique de h est : $h : t \mapsto a\left[(t+\alpha)^2 - \beta\right]$ et, dans ce cas, le sommet de la parabole a pour coordonnées $(-\alpha\,;-a\beta)$. On a donc $-\alpha = 2{,}5$ i.e. $\alpha = -2{,}5$ et $-a\beta = 6{,}125$ i.e. $\beta = -\frac{6{,}125}{a}$. Ainsi, $h : t \mapsto a\left[(t-2{,}5)^2 + \frac{6{,}125}{a}\right]$. De plus, $f(0) = 3$ donc $a\left[(-2{,}5)^2 + \frac{6{,}125}{a}\right] = 3$ i.e. $6{,}25a + 6{,}125 = 3$ donc $a = \frac{3-6{,}125}{6{,}25} = -0{,}5$. On conclut donc que $\boxed{h : t \mapsto -0{,}5\left[(t-2{,}5)^2 - 12{,}25\right]}$.
   Si on prend la définition du manuel, la forme canonique de h est $h : t \mapsto a(t-\alpha)^2 + \beta$. Dans ce cas, le sommet de la parabole a pour coordonnées $(\alpha\,;\beta)$. Ainsi, $\alpha = 2{,}5$ et $\beta = 6{,}125$ donc $h : t \mapsto a(t-2{,}5)^2 + 6{,}125$. De plus, $h(0) = 3$ donc $a(-2{,}5)^2 + 6{,}125 = 3$ c'est-à-dire $6{,}25a^2 = 3 - 6{,}125$ i.e. $a = \frac{-3{,}125}{6{,}25} = -0{,}5$. On conclut donc que $\boxed{h : t \mapsto -0{,}5(t-2{,}5)^2 + 6{,}125}$.
2. On en déduit que, pour tout réel t, $h(t) = -0{,}5(t^2 - 5t + 2{,}5^2 - 12{,}25)$ c'est-à-dire $\boxed{h(t) = -0{,}5t^2 + 2{,}5t + 3}$.
   En remarquant que $12{,}25 = 3{,}5^2$, on a, pour tout réel t,
   $$h(t) = -0{,}5\left[(t-2{,}5)^2 - 3{,}5^2\right] = -0{,}5(t-2{,}5-3{,}5)(t-2{,}5+3{,}5)$$
   donc la forme factorisée de h est $\boxed{h : t \mapsto -0{,}5(t-6)(t+1)}$.
3. Pour déterminer le temps durant lequel la balle reste au-dessus 5m, on résout l'inéquation $h(t) \geqslant 5$. Or,
   $$h(t) \geqslant 5 \Leftrightarrow -0{,}5t^2 + 2{,}5t + 3 \geqslant 5 \Leftrightarrow -0{,}5t^2 + 2{,}5t - 2 \geqslant 0.$$
   Le discriminant du trinôme $-0{,}5t^2 + 2{,}5t - 2$ est $\Delta' = 2{,}5^2 - 4\times(-0{,}5)\times(-2) = 2{,}25 > 0$ donc ce trinôme possède deux racines réelles :
   $$t_1 = \frac{-2{,}5 - \sqrt{2{,}25}}{2\times(-0{,}5)} = 4 \qquad \text{et} \qquad t_3 = \frac{-2{,}5 + \sqrt{2{,}25}}{2\times(-0{,}5)} = 1$$
   Comme le coefficient dominant de $-0{,}5t^2 + 2{,}5t - 2$ est négatif, on en déduit que $-0{,}5t^2 + 2{,}5t - 2 \geqslant 0$ si et seulement si $t \in [1\,;4]$. Ainsi, la balle restera au-dessus de 5m pendant 3 secondes.
4. Dire que la balle atteint le sol signifie que $h(t) = 0$. Or, les solutions de $h(t) = 0$ sont, d'après la question **2.**, -1 et 6. Comme $-1 < 0$, on en déduit que la balle touchera le sol au bout de 6 secondes.