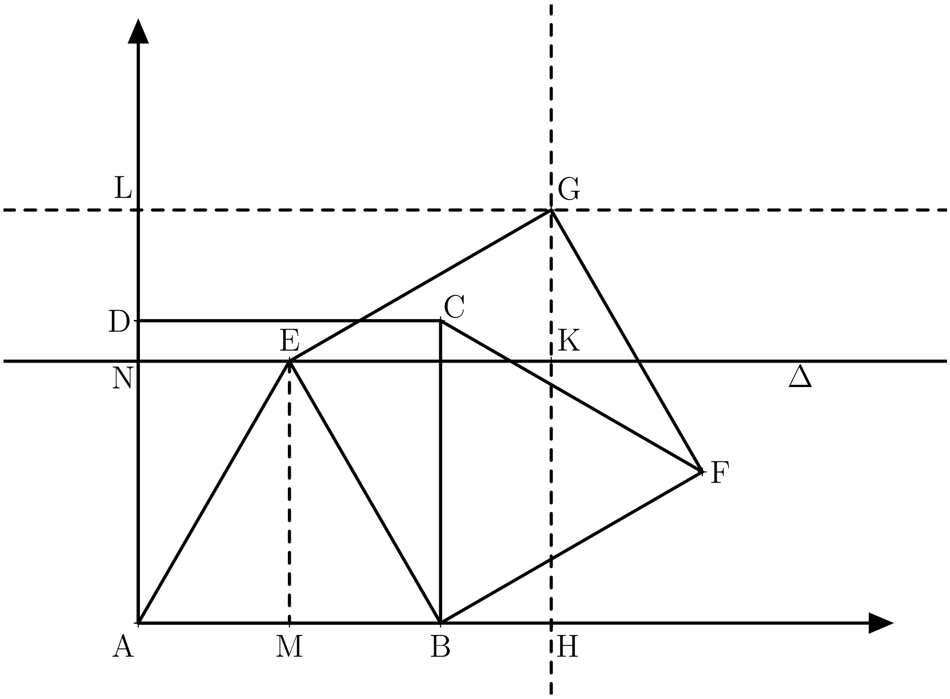
Corrigé du devoir à la maison n°3

Exercice 1.

1.



2. **a.** $\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{BE}=\overrightarrow{EA}\cdot\overrightarrow{EB}=EA\times EB\times\cos(\widehat{AEB})=1\times1\times\cos(\frac{\pi}{3})$ donc $\boxed{\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{BE}=\frac{1}{2}}$.

$\overrightarrow{DA}\cdot\overrightarrow{BE}=\overrightarrow{CB}\cdot\overrightarrow{EB}=-\overrightarrow{BC}\times\overrightarrow{BE}=-BC\times BE\times\cos(\widehat{CBE})$. Or, $\widehat{CBE}=\widehat{CBA}-\widehat{EBA}=\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{6}$ donc $\overrightarrow{DA}\cdot\overrightarrow{BE}=1\times1\times\cos(\frac{\pi}{6})$ soit $\boxed{\overrightarrow{DA}\cdot\overrightarrow{BE}=-\frac{\sqrt{3}}{2}}$.

b. Par hypothèse, BC = BA = BE = BF donc BCF est isocèle en B. De plus, $\widehat{CBF}=\widehat{EBF}-\widehat{CBE}=\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{3}$ donc $\boxed{\text{BCF est équilatéral}}$.

Il s'ensuit que $\overrightarrow{DA}\cdot\overrightarrow{BF}=\overrightarrow{CB}\cdot\overrightarrow{BF}=-\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{BF}=-BC\times BF\times\cos(\widehat{CBF})=-1\times1\times\cos(\frac{\pi}{3})$ c'est-à-dire $\boxed{\overrightarrow{DA}\cdot\overrightarrow{BF}=-\frac{1}{2}}$.

c. $\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{EG}=-\overrightarrow{EA}\cdot\overrightarrow{EG}=-EA\times EG\times\cos(\widehat{AEG})$. Or, $\widehat{AEG}=\widehat{AEB}+\widehat{BEG}=\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{2}=\frac{5\pi}{6}$ donc $\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{EG}=-1\times1\times\cos(\frac{5\pi}{6})=-\cos(\pi-\frac{\pi}{6})=\cos(\frac{\pi}{6})$ soit $\boxed{\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{EG}=\frac{\sqrt{3}}{2}}$.

d. Grâce à la relation de Chasles,

$$\begin{aligned}\overrightarrow{DE}\cdot\overrightarrow{BG}&=(\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AE})\cdot(\overrightarrow{BE}+\overrightarrow{EG})\\&=\overrightarrow{DA}\cdot\overrightarrow{BE}+\overrightarrow{DA}\cdot\overrightarrow{EG}+\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{BE}+\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{EG}\\&=-\frac{\sqrt{3}}{2}+\overrightarrow{DA}\cdot\overrightarrow{BF}+\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}=-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\\&=0\end{aligned}$$

donc $\boxed{\overrightarrow{DE}\perp\overrightarrow{BG}}$.

e. On déduit de la question précédente que (DE) $\perp$ (BG). De plus, les diagonales d'un carré étant perpendiculaire, (EF) $\perp$ (BG). Ainsi, les droites (DE) et (EF) sont perpendiculaires à une même droite donc elles sont parallèles. De plus, elles possèdent le point E en commun donc elles sont confondues. Il s'ensuit que $\boxed{\text{D, E et F sont alignés}}$.

3. a. Par définition, $\boxed{\mathrm{B}\,(1\,;0) \text{ et } \mathrm{D}\,(0\,;1)}$.

b. Les coordonnées de E sont $\left(\mathrm{AE}\cos(\widehat{\mathrm{BAE}})\,;\mathrm{AE}\sin(\widehat{\mathrm{BAE}})\right)$ donc, comme AE $= 1$ et $\widehat{\mathrm{BAE}} = \frac{\pi}{3}$, on conclut que $\boxed{\mathrm{E}\left(\frac{1}{2}\,;\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}$.

c. Comme (AB) et Δ sont parallèles, les angles alternes-internes $\widehat{\mathrm{ABE}}$ et $\widehat{\mathrm{BEK}}$ sont égaux. Ainsi, $\boxed{\widehat{\mathrm{BEK}} = \frac{\pi}{3}}$. On en déduit que $\widehat{\mathrm{KEG}} = \widehat{\mathrm{BEG}} - \widehat{\mathrm{BEK}} = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3}$ c'est-à-dire $\boxed{\widehat{\mathrm{KEG}} = \frac{\pi}{6}}$.

d. Dans le triangle EKG rectangle en K, $\mathrm{EK} = \mathrm{EG}\cos(\widehat{\mathrm{KEG}}) = 1 \times \cos(\frac{\pi}{6})$ donc $\boxed{\mathrm{EK} = \frac{\sqrt{3}}{2}}$ et $\mathrm{GK} = \mathrm{EG}\sin(\widehat{\mathrm{KEG}}) = 1 \times \sin(\frac{\pi}{6})$ donc $\boxed{\mathrm{GK} = \frac{1}{2}}$.

Considérons, d'une part, M et N les projetés orthogonaux de E sur (AB) et (AD) et, d'autre part, H et L les projetés orthogonaux de G sur (AB) et (AD) (voir la figure). Alors,

$$x_{\mathrm{G}} = \mathrm{AH} = \mathrm{AM} + \mathrm{MG} = x_{\mathrm{E}} + \mathrm{EK} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1+\sqrt{3}}{2}$$

et

$$y_{\mathrm{G}} = \mathrm{AL} = \mathrm{AN} + \mathrm{NL} = y_{\mathrm{E}} + \mathrm{KG} = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} = \frac{1+\sqrt{3}}{2}$$

donc $\boxed{\mathrm{G}\left(\frac{1+\sqrt{3}}{2}\,;\frac{1+\sqrt{3}}{2}\right)}$.

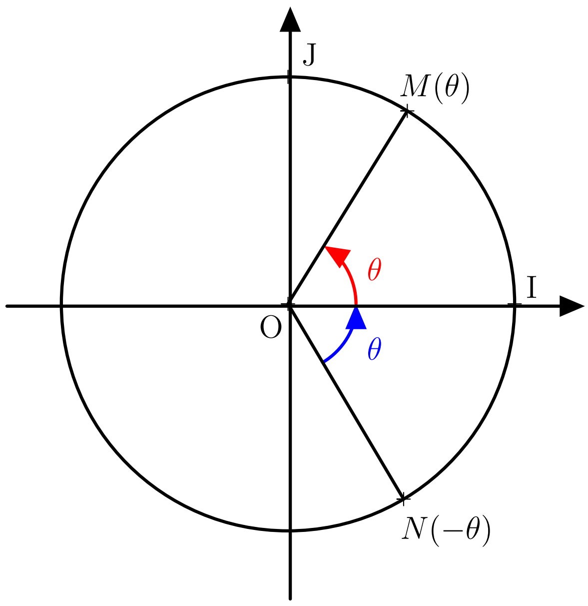
e. D'après les questions précédentes, $\overrightarrow{\mathrm{DE}}\left(\frac{1}{2} - 0\,;\frac{\sqrt{3}}{2} - 1\right)$ c'est-à-dire $\overrightarrow{\mathrm{DE}}\left(\frac{1}{2}\,;\frac{\sqrt{3}-2}{2}\right)$ et $\overrightarrow{\mathrm{BG}}\left(\frac{1+\sqrt{3}}{2} - 1\,;\frac{1+\sqrt{3}}{2} - 0\right)$ c'est-à-dire $\overrightarrow{\mathrm{DE}}\left(\frac{\sqrt{3}-1}{2}\,;\frac{1+\sqrt{3}}{2}\right)$.
Ainsi, puisque le repère est orthonormé,

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{DE}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{BF}} &= \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{3}-1}{2} + \frac{\sqrt{3}-2}{2} \times \frac{1+\sqrt{3}}{2} \\ &= \frac{\sqrt{3} - 1 + (\sqrt{3}-2)(1+\sqrt{3})}{4} \\ &= \frac{\sqrt{3} - 1 + \sqrt{3} + 3 - 2 - 2\sqrt{3}}{4} \\ &= 0\end{aligned}$$

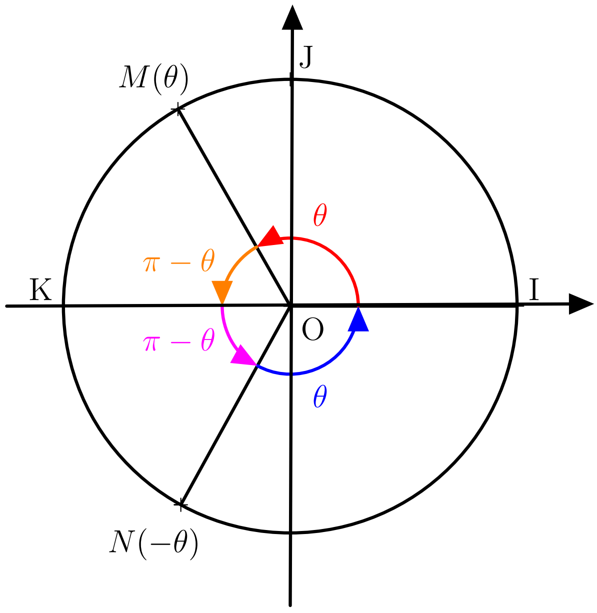
donc on retrouve bien que $\boxed{\overrightarrow{\mathrm{DE}} \perp \overrightarrow{\mathrm{BF}}}$.

Exercice 2 (facultatif)**.**

1. a. Par définition, $\overrightarrow{\mathrm{O}M} \cdot \overrightarrow{\mathrm{O}N} = \mathrm{O}M \times \mathrm{O}N \times \cos(\widehat{M\mathrm{O}N}) = \cos(\widehat{M\mathrm{O}N})$ car $\mathrm{O}M = \mathrm{O}N = 1$. Pour évaluer l'angle $\widehat{M\mathrm{O}N}$, distinguons deux cas.



cas $0 \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{2}$



cas $\frac{\pi}{2} < \theta \leqslant \pi$

Si $0 \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{2}$ alors $\widehat{MON} = \widehat{IOM} + \widehat{ION} = \theta + \theta = 2\theta$ et donc $\overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{ON} = \cos(2\theta)$.
Si $\frac{\pi}{2} < \theta \leqslant \pi$ alors, en notant K le point de coordonnées $(-1\,;0)$, $\widehat{MON} = \widehat{KOM} + \widehat{KON} = \pi - \theta + \pi - \theta = 2\pi - 2\theta$ donc $\overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{ON} = \cos(2\pi - 2\theta) = \cos(-2\theta) = \cos(2\theta)$.

Ainsi, dans tous les cas, $\boxed{\overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{ON} = \cos(2\theta)}$.

b. Par définition, $M\,(\cos(\theta)\,;\sin(\theta))$ et $N\,(\cos(-\theta)\,;\sin(-\theta))$ c'est-à-dire $N\,(\cos(\theta)\,;-\sin(\theta))$. On en déduit que $\overrightarrow{OM}\,(\cos(\theta) - 0\,;\sin(\theta) - 0)$ c'est-à-dire $\overrightarrow{OM}\,(\cos(\theta)\,;\sin(\theta))$ et $\overrightarrow{ON}\,(\cos(\theta) - 0\,;-\sin(\theta) - 0)$ c'est-à-dire $\overrightarrow{ON}\,(\cos(\theta)\,;-\sin(\theta))$. Dès lors, puisque le repère est orthonormé, $\overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{ON} = \cos(\theta) \times \cos(\theta) + \sin(\theta) \times (-\sin(\theta))$ c'est-à-dire $\boxed{\overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{ON} = \cos^2(\theta) - \sin^2(\theta)}$.

c. On déduit des deux questions précédentes que $\cos(2\theta) = \cos^2(\theta) - \sin^2(\theta)$. Or, $\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta) = 1$ donc $\sin^2(\theta) = 1 - \cos^2(\theta)$ donc

$$\cos(2\theta)) = \cos^2(\theta) - (1 - \cos^2(\theta)) = \cos^2(\theta) - 1 + \cos^2(\theta)$$

c'est-à-dire, finalement, $\boxed{\cos(2\theta) = 2\cos^2(\theta) - 1}$.

2. a. On a

$$\cos\left(\frac{8\pi}{5}\right) = \cos\left(\frac{10\pi - 2\pi}{5}\right) = \cos\left(2\pi - \frac{2\pi}{5}\right) = \cos\left(-\frac{2\pi}{5}\right) = \cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$$

donc $\boxed{\cos(\frac{8\pi}{5}) = a}$.

b. En utilisant **1.c.**,

$$\begin{aligned}\cos\left(\frac{8\pi}{5}\right) &= \cos\left(2 \times \frac{4\pi}{5}\right) = 2\cos^2\left(\frac{4\pi}{5}\right) + 1 = 2\left[\cos\left(2 \times \frac{2\pi}{5}\right)\right]^2 + 1\\ &= 2\left[2\cos^2\left(\frac{2\pi}{5}\right) - 1\right]^2 + 1\end{aligned}$$

c'est-à-dire $\boxed{\cos\left(\frac{8\pi}{5}\right) = 2(2a^2 - 1)^2 - 1}$.

c. On déduit des deux questions précédentes que $a = 2(2a^2-1)^2-1 = 2(4a^4-4a^2+1)-1 = 8a^4 - 8a^2 + 2 - 1 = 8a^4 - 8a^2 + 1$ donc $8a^4 - 8a^2 - a + 1 = 0$ donc $\underline{a \text{ est une racine de la fonction polynôme } P : x \mapsto 8x^4 - 8x^2 - x + 1}$.

3. Soit $x \in \mathbb{R}$. Alors,

$$\begin{aligned}(x-1)(2x+1)(4x^2+2x-1) &= (2x^2+x-2x-1)(4x^2+2x-1)\\ &= (2x^2-x-1)(4x^2+2x-1)\\ &= 8x^4+4x^3-2x^2-4x^3-2x^2+x-4x^2-2x+1\\ &= 8x^4-8x^2-x+1 = P(x).\end{aligned}$$

Ainsi, $\boxed{\text{pour tout réel } x,\ P(x) = (x-1)(2x+1)(4x^2+2x-1)}$.

4. On déduit de la question précédente que, pour tout réel x,

$$\begin{aligned}P(x) = 0 &\Leftrightarrow x-1=0 \text{ ou } 2x+1=0 \text{ ou } 4x^2+2x-1=0\\ &\Leftrightarrow x=1 \text{ ou } x=-\frac{1}{2} \text{ ou } 4x^2+2x-1=0\end{aligned}$$

On a vu que a est une racine de P. Or, $0 < \frac{2\pi}{5} < \frac{\pi}{2}$ donc $0 < a < 1$. Ainsi, $a \neq 1$ et $a \neq -\frac{1}{2}$. Ainsi, a est une racine positive du trinôme $4x^2+2x-1$. Or, le discriminant de ce trinôme est $\Delta = 2^2 - 4 \times 4 \times (-1) = 20$ donc ce dernier possède deux racines réelles :

$$x_1 = \frac{-2-\sqrt{20}}{2\times 4} = \frac{-2-2\sqrt{5}}{8} = -\frac{1+\sqrt{5}}{4}$$

et

$$x_2 = \frac{-2+\sqrt{20}}{2\times 4} = \frac{-2+2\sqrt{5}}{8} = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$$

Comme $x_1 < 0$ et $a > 0$, on conclut que $\boxed{\cos(\frac{2\pi}{5}) = \frac{\sqrt{5}-1}{4}}$.