Devoir à la maison n°3

À rendre le mardi 7 janvier 2020

Exercice 1. On dit qu'un triangle ou un carré est direct si ses sommets sont décrits dans le sens trigonométrique. Par exemple, dire qu'un triangle ABC est direct signifie qu'on passe de A à B et de B à C en tournant dans le sens trigonométrique.

On considère un carré direct ABCD du plan de côté 1. On considère le point E tel que ABE soit un triangle équilatéral direct et F et G les points tels que BFGE soit un carré direct.

1. Faire une figure.
2. **a.** Calculer les produits scalaires $\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{BE}$ et $\overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{BE}$.
   b. Démontrer que le triangle BCF est équilatéral et en déduire la valeur du produit scalaire $\overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{BF}$.
   c. Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{EG}$.
   d. Déduire des questions précédentes que $\overrightarrow{DE} \perp \overrightarrow{BG}$.
   e. En déduire que les points D, E et F sont alignés.
3. On se propose de retrouver le résultat de la question **2.d.** en utilisant le repère orthonormé $(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD})$.
   a. Quelles sont les coordonnées des points B et D ?
   b. Montrer que les coordonnées de E sont $\left(\frac{1}{2}\,;\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

   On note Δ la parallèle à (AB) passant par E et K le projeté orthogonal de G sur Δ.

   c. Justifier que $\widehat{BEK} = \frac{\pi}{3}$ et en déduire une mesure en radian de $\widehat{KEG}$.
   d. Calculer les longueurs EK et GK et en déduire que les coordonnées de G sont $\left(\frac{1+\sqrt{3}}{2}\,;\frac{1+\sqrt{3}}{2}\right)$.
   e. Retrouver le résultat de la question **2.d.** à l'aide des coordonnées.

Exercice 2 (facultatif)**.** Le but de cet exercice est de déterminer la valeur exacte de $\cos(\frac{2\pi}{5})$.

1. Le plan est muni d'un repère orthonormé direct (O ; I, J). Soit $\theta \in [0\,;\pi]$. On considère sur le cercle trigonométrique le point M image du réel θ et le point N image du réel $-\theta$.
   a. Montrer que $\overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{ON} = \cos(2\theta)$. (Distinguer les cas $\theta \leqslant \frac{\pi}{2}$ et $\theta > \frac{\pi}{2}$).
   b. Montrer que $\overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{ON} = \cos^2(\theta) - \sin^2(\theta)$.
   c. En déduire que $\cos(2\theta) = 2\cos^2(\theta) - 1$.
2. On pose $a = \cos(\frac{2\pi}{5})$.
   a. Montrer que $\cos(\frac{8\pi}{5}) = a$.
   b. En utilisant deux fois **1.c.**, montrer que $\cos(\frac{8\pi}{5}) = 2(2a^2-1)^2 - 1$.
   c. En déduire que a est une racine de la fonction polynôme $P : x \mapsto 8x^4 - 8x^2 - x + 1$.
3. Montrer que, pour tout réel x, $P(x) = (x-1)(2x+1)(4x^2+2x-1)$.
4. En déduire que $\cos(\frac{2\pi}{5}) = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$.