Corrigé du devoir à la maison n°2

Exercice 1.

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors,

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= (n+1)^3 - 2(n+1)^2 + (n+1) - 1 \\ &= n^3 + 3n^2 + 3n + 1 - 2(n^2 + 2n + 1) + n \\ &= n^3 + 3n^2 + 3n + 1 - 2n^2 - 4n - 2 + n \\ &= n^3 + n^2 - 1 \end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= n^3 + n^2 - 1 - (n^3 - 2n^2 + n - 1) = n^3 + n^2 - 1 - n^3 + 2n^2 - n + 1 \\ &= 3n^2 - n = n(3n-1) \end{aligned}$$

Or, $3n - 1 \geqslant 0$ si et seulement si $n \geqslant \frac{1}{3}$ i.e., puisque n est entier, si et seulement si $n \geqslant 1$. Ainsi, pour tout $n \geqslant 1$, $n \geqslant 0$ et $3n - 1 \geqslant 0$ donc $u_{n+1} - u_n \geqslant 0$. Mais, de plus, pour $n = 0$, $u_{n+1} - u_n = 0$ donc finalement, $\boxed{(u_n) \text{ est croissante à partir du rang } 0}$.

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Alors,

$$v_{n+1} - v_n = \frac{3^{n+1}}{n+1} - \frac{3^n}{n} = \frac{3^n \times 3 \times n - 3^n(n+1)}{n(n+1)} = \frac{3^n(3n - (n+1))}{n(n+1)} = \frac{3^n(2n-1)}{n(n+1)}.$$

Comme $n > 0$, $n(n+1) > 0$ et, comme $3 > 0$, $3^n > 0$. Ainsi, le signe de $v_{n+1} - v_n$ est le signe de $2n - 1$. Or, $2n - 1$ est positif si et seulement si $n \geqslant \frac{1}{2}$ i.e., puisque n est entier, si et seulement si $n \geqslant 1$.
On conclut donc que $\boxed{(v_n) \text{ est croissante à partir du rang } 1}$.

3. Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors,

$$w_{n+1} - w_n = w_n^2 + 3w_n + 4 - w_n = w_n^2 + 2w_n + 4 = (w_n + 1)^2 - 1 + 4 = (w_n + 1)^2 + 3 \geqslant 0$$

donc $\boxed{(w_n) \text{ est croissante}}$.

Exercice 2.

1. a. On a $(\sqrt{x} - \sqrt{y})^2 = \sqrt{x}^2 - 2\sqrt{x}\sqrt{y} + \sqrt{y}^2 = x - 2\sqrt{xy} + y$.

b. Comme le carré d'un nombre réel est positif, on déduit de la question précédente que $x - 2\sqrt{xy} + y \geqslant 0$ donc $x + y \geqslant 2\sqrt{xy}$ et ainsi, en divisant par $2 > 0$, il vient $\boxed{\frac{x+y}{2} \geqslant \sqrt{xy}}$.

2. a. Par définition, $u_1 = \frac{u_0+v_0}{2} = \frac{1+4}{2} = \frac{5}{2}$, $v_1 = \sqrt{u_0 v_0} = \sqrt{1 \times 4} = \sqrt{4} = 2$, $u_2 = \frac{u_1+v_1}{2} = \frac{\frac{5}{2}+2}{2} = \frac{9}{4}$ et $v_1 = \sqrt{u_1 v_1} = \sqrt{\frac{5}{2} \times 2} = \sqrt{5}$,

b. Soit un entier $n \geqslant 1$. Alors, en appliquant la question **1.b.** avec $x = u_{n-1}$ et $y = v_{n-1}$, il vient

$$v_n = \sqrt{u_{n-1}v_{n-1}} \leqslant \frac{u_{n-1} + v_{n-1}}{2} = u_n.$$

Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $v_n \leqslant u_n$.

c. Soit un entier $n \geqslant 1$. Alors,

$$u_{n+1} - u_n = \frac{u_n + v_n}{2} - u_n = \frac{u_n + v_n - 2u_n}{2} = \frac{v_n - u_n}{2}.$$

Or, $v_n \leqslant u_n$ donc $v_n - u_n \leqslant 0$ et donc $u_{n+1} - u_n \leqslant 0$.

Ainsi, $\boxed{(u_n) \text{ est décroissante à partir du rang } 1}$.

Soit un entier $n \geqslant 1$. Alors, $v_n = \sqrt{u_{n-1}v_{n-1}} \geqslant 0$ donc $v_n = \sqrt{v_n}^2$ et ainsi

$$v_{n+1} - v_n = \sqrt{u_n v_n} - \sqrt{v_n}^2 = \sqrt{u_n}\sqrt{v_n} - \sqrt{v_n}^2 = \sqrt{v_n}(\sqrt{u_n} - \sqrt{v_n}).$$

Or, d'une part, $\sqrt{v_n} \geqslant 0$ et, d'autre part, comme $v_n \leqslant u_n$, $\sqrt{v_n} \leqslant \sqrt{u_n}$ (par croissance de la fonction racine carrée sur $[0\,;+\infty[$) donc $\sqrt{u_n} - \sqrt{v_n} \geqslant 0$. Ainsi, par produit, $v_{n+1} - v_n \geqslant 0$.

On conclut que $\boxed{(u_n) \text{ est croissante à partir du rang } 1}$.