

Devoir à la maison n°2

À rendre le mardi 5 novembre 2019

Exercice 1. Dans chaque cas, démontrer que la suite est monotone à partir d'un rang qu'on déterminera.

1. (u_n) est définie par : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = n^3 - 2n^2 + n - 1$.
2. (v_n) est définie par : pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $v_n = \frac{3^n}{n}$.
3. (w_n) est définie par : $w_0 = 3$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $w_{n+1} = w_n^2 + 3w_n + 4$.

Exercice 2.

1. Soit x et y deux réels positifs ou nuls.
 - a. Développer $(\sqrt{x} - \sqrt{y})^2$.
 - b. En déduire que $\sqrt{xy} \leq \frac{x+y}{2}$.
2. On considère les deux suites (u_n) et (v_n) définies par $u_0 = 1$, $v_0 = 4$ et, pour tout entier naturel n ,

$$u_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2} \quad \text{et} \quad v_{n+1} = \sqrt{u_n v_n}.$$

- a. Calculer les valeurs exactes de u_1 , u_2 , v_1 et v_2 .
- b. Démontrer que, pour tout entier $n \geq 1$, $v_n \leq u_n$.
Indication. — Pour $n \geq 1$, on peut écrire u_n et v_n en fonction de u_{n-1} et de v_{n-1} .
- c. Montrer que (u_n) et (v_n) sont monotones à partir du rang 1.

Devoir à la maison n°2

À rendre le mardi 5 novembre 2019

Exercice 1. Dans chaque cas, démontrer que la suite est monotone à partir d'un rang qu'on déterminera.

1. (u_n) est définie par : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = n^3 - 2n^2 + n - 1$.
2. (v_n) est définie par : pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $v_n = \frac{3^n}{n}$.
3. (w_n) est définie par : $w_0 = 3$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $w_{n+1} = w_n^2 + 3w_n + 4$.

Exercice 2.

1. Soit x et y deux réels positifs ou nuls.
 - a. Développer $(\sqrt{x} - \sqrt{y})^2$.
 - b. En déduire que $\sqrt{xy} \leq \frac{x+y}{2}$.
2. On considère les deux suites (u_n) et (v_n) définies par $u_0 = 1$, $v_0 = 4$ et, pour tout entier naturel n ,

$$u_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2} \quad \text{et} \quad v_{n+1} = \sqrt{u_n v_n}.$$

- a. Calculer les valeurs exactes de u_1 , u_2 , v_1 et v_2 .
- b. Démontrer que, pour tout entier $n \geq 1$, $v_n \leq u_n$.
Indication. — Pour $n \geq 1$, on peut écrire u_n et v_n en fonction de u_{n-1} et de v_{n-1} .
- c. Montrer que (u_n) et (v_n) sont monotones à partir du rang 1.