

## ◆ Thème 3.4. Modèles démographiques

Dans ce thème, il s'agit de donner des modèles mathématiques permettant d'étudier l'évolution d'une population.

### I. — Quelques rappels

#### Définition 1

Si une quantité évolue d'une valeur initiale  $V_i$  à une valeur finale  $V_f$ , on définit :

1. la variation absolue de cette quantité par  $V_f - V_i$  ;
2. la variation relative de cette quantité par  $\frac{V_f - V_i}{V_i}$ .

**Exemple 2.** Si la population d'un pays évolue de 2 millions à 2,2 millions alors la variation absolue est  $2,2 - 2 = 0,2$  millions et la variation relative est  $\frac{2,2 - 2}{2} = 0,1$ .

*Remarque 3.* La variation absolue a la même unité que la quantité étudiée alors que la variation relative est sans unité.

#### Propriété 4

Dans un repère du plan, une droite  $\mathcal{D}$  qui n'est pas parallèle à l'axe de ordonnées a une équation de la forme  $y = ax + b$ . On dit alors que le nombre  $a$  est le coefficient directeur de  $\mathcal{D}$  et que le nombre  $b$  est l'ordonnée à l'origine de  $\mathcal{D}$ .

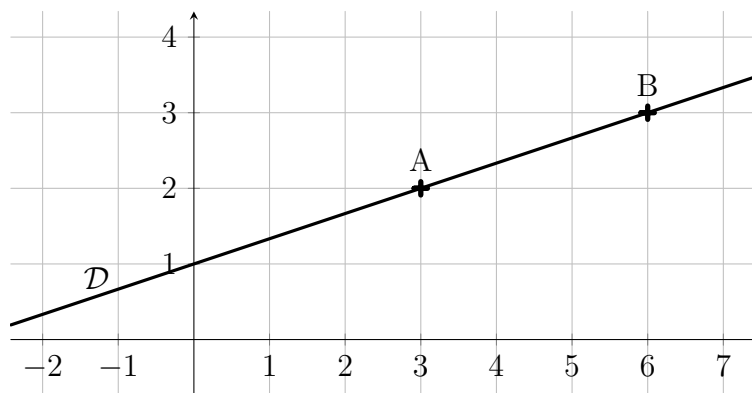
#### Méthode 5

Soit  $\mathcal{D}$  une droite qui n'est pas parallèle à l'axe des ordonnées.

1. L'ordonnée à l'origine de  $\mathcal{D}$  est l'ordonnée du point d'intersection de  $\mathcal{D}$  avec l'axe des ordonnées.
2. Soit A et B deux points distincts de  $\mathcal{D}$ . Alors, le coefficient directeur de  $\mathcal{D}$  est

$$a = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$$

**Exemple 6.** On considère la droite  $\mathcal{D}$  représentée ci-dessous.



Alors, l'ordonnée à l'origine de  $\mathcal{D}$  est  $b = 1$  et, comme les points A(3; 2) et B(6; 3) appartiennent à  $\mathcal{D}$ , le coefficient directeur de  $\mathcal{D}$  est  $a = \frac{3 - 2}{6 - 3} = \frac{1}{3}$ .

## II. — Modèle linéaire

**Exemple 7.** On considère l'évolution d'une population d'une ville sur plusieurs années. Les valeurs données sont exprimées en milliers et arrondies à l'unité.

année	2015	2016	2017	2018	2019	2020
population	49	51	53	55	57	59

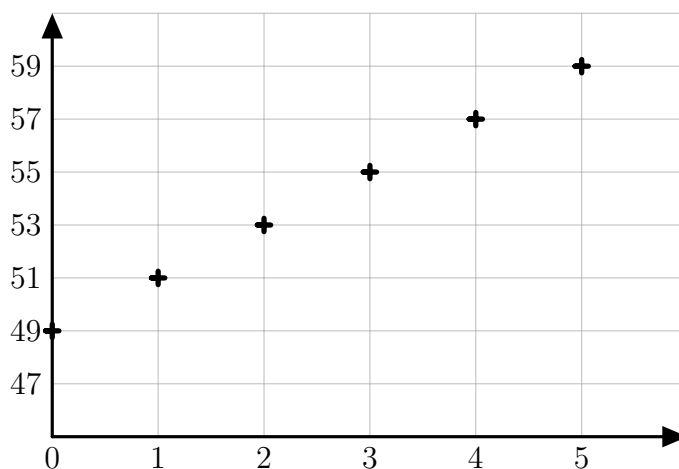
On considère 2015 comme l'année 0 et on note  $u(n)$  la population à l'année  $n$ . Ainsi,  $u(0) = 49$ ,  $u(1) = 51$ ,  $u(2) = 53$ ,  $u(3) = 55$ ,  $u(4) = 57$  et  $u(5) = 59$ .

Si on calcule les variations absolues d'une année sur l'autre, on trouve :

$$u(1) - u(0) = 2 \quad u(2) - u(1) = 2 \quad u(3) - u(2) = 2 \quad u(4) - u(3) = 2 \quad u(5) - u(4) = 2.$$

Ainsi, on constate que les variations absolues sont constantes égales à 2.

Si on représente dans un repère les points de coordonnées  $(n, u(n))$ , on obtient le nuage de points suivant :



On constate que ces points sont alignés sur une droite dont le coefficient directeur est 2 et dont l'ordonnée à l'origine est 49. Ainsi, l'équation réduite de cette droite est  $y = 2x + 49$ .

Si la population continue à évoluer de la même façon, on peut estimer qu'en 2030, la ville aura une population de  $2 \times 15 + 49 = 79$  milliers d'habitants (car  $2030 - 2015 = 15$  donc 2030 correspond à l'année  $n = 15$ ).

### Définition 8

On dit qu'une quantité  $u$  dépendant d'un entier naturel  $n$  a une variation linéaire si sa variation absolue  $u(n+1) - u(n)$  a une valeur constante  $a$  (c'est-à-dire une valeur  $a$  qui ne dépend pas de  $n$ ).

La suite des valeurs  $u(n)$  est alors appelée une suite arithmétique de raison  $a$ .

### Propriété 9

Si une suite de valeurs  $u(n)$  est une suite arithmétique de raison  $a$  alors

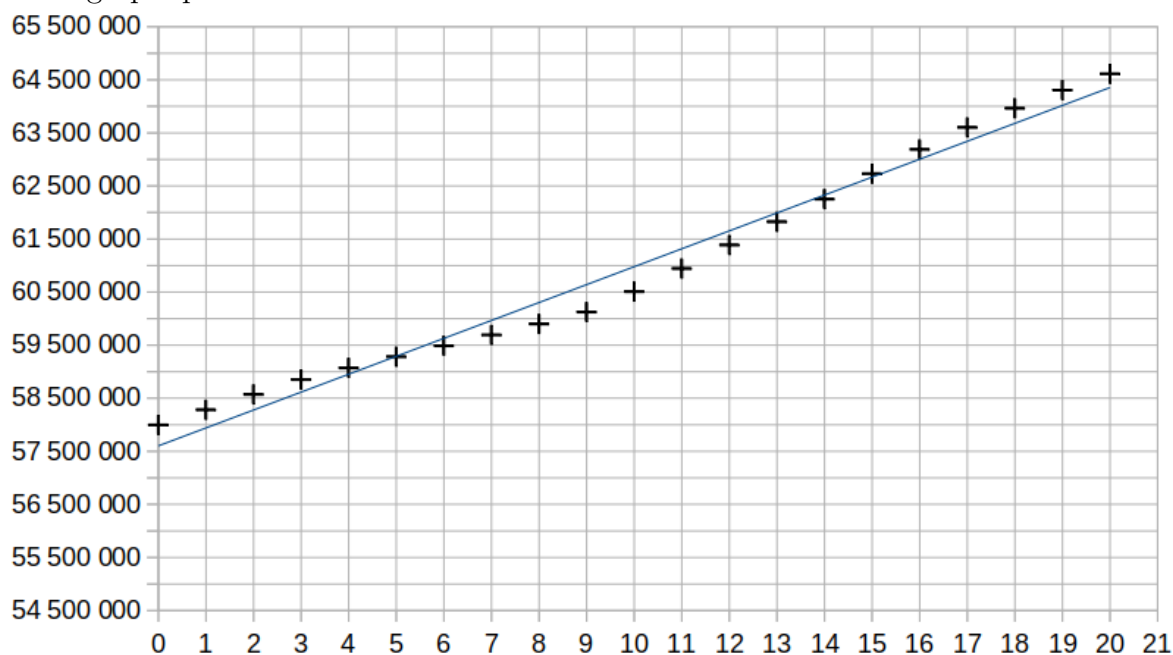
1. les points de coordonnées  $(n; u(n))$  sont alignés sur une droite dont le coefficient directeur est  $a$ ;
2. Pour tout entier naturel  $n$ ,  $u(n) = u(0) + na$ .

En fait, dans la réalité, les variations absolues ne sont jamais constantes. On considère cependant que le modèle linéaire est adapté si les variations absolues varient peu. Cela se traduira par le fait que les points de coordonnées  $(n, u(n))$  ne sont pas parfaitement alignés mais approximativement alignés. Dans ce cas, on peut rechercher une droite qui représenterait au mieux cette alignement approximatif. Cette droite est appelée la droite d'ajustement linéaire du nuage de points.

**Exemple 10.** Sur le site de l'INSEE<sup>(1)</sup>, on trouve les statistiques de la population française. On a rassemblé dans le tableau suivant le nombre total d'habitants en France entre 1990 et 2010.

année	population	année	population	année	population
1990	57 996 401	1997	59 691 177	2004	62 251 062
1991	58 280 135	1998	59 899 347	2005	62 730 537
1992	58 571 237	1999	60 122 665	2006	63 186 117
1993	58 852 002	2000	60 508 150	2007	63 600 690
1994	59 070 077	2001	60 941 410	2008	63 961 859
1995	59 487 413	2002	61 385 070	2009	64 304 500
1996	59 280 577	2003	61 824 030	2010	64 612 939

Si on représente le nuage de points associé en prenant comme année 0 l'année 1990, on obtient le graphique suivant.



À l'aide d'un tableur, on a construit sur le graphique précédent la droite d'ajustement linéaire de ce nuage de points. Cette droite passe par les points de coordonnées  $(10; 61\,000\,000)$  et  $(13; 62\,000\,000)$ . On peut donc estimer son coefficient directeur à

$$a = \frac{62\,000\,000 - 61\,000\,000}{13 - 10} \approx 333\,000.$$

De plus, l'ordonnée à l'origine de cette droite vaut approximativement 57 500 000 donc la droite d'ajustement linéaire a une équation proche de  $y = 333\,000x + 57\,500\,000$ .

Selon ce modèle, on peut estimer la population en France en 2020 à  $333\,000 \times 30 + 57\,500\,000 \approx 67\,500\,000$  d'habitants. (Les prévisions de l'INSEE pour 2020 sont en fait de 67 063 703.)

(1). <https://www.insee.fr/fr/statistiques/1892117?sommaire=1912926>

### III. — Modèle exponentiel

Le modèle linéaire ne s'applique qu'à des populations dont l'évolution absolue est relativement constante. Certaines populations ont une évolution beaucoup plus rapide. C'est le cas, par exemple, de la population mondiale. Le tableau suivant rassemble des estimations de celle-ci en milliard d'habitants<sup>(2)</sup>.

année	1950	1955	1960	1965	1970	1975	1980	1985	1990
population	2,54	2,77	3,03	3,34	3,7	4,08	4,46	4,87	5,33

Si on calcule les variations absolues, on obtient :

0,23    0,26    0,31    0,36    0,38    0,38    0,41    0,46

donc ces variations absolues ne sont pas constantes puisqu'elles varient du simple au double.

En revanche, si on calcule les variations relatives, on obtient :

0,09    0,09    0,1    0,11    0,1    0,09    0,09    0,09

donc ces variations relatives sont relativement constantes.

Ici, le modèle linéaire ne s'applique pas. On constate un autre type d'évolution dans lequel ce ne sont pas les variations absolues mais les variations relatives qui sont (approximativement) constantes. Dans ce cas, on parle d'évolution exponentielle.

#### Définition 11

On dit qu'une quantité  $u$  dépendant d'un entier naturel  $n$  a une variation exponentielle si sa variation relative  $\frac{u(n+1) - u(n)}{u(n)}$  a une valeur constante  $t$  (c'est-à-dire une valeur  $t$  qui ne dépend pas de  $n$ ).

Le nombre  $t$  est alors appelé le taux de variation de  $u$ .

Dans ce cas, la variation absolue  $u(n+1) - u(n)$  est proportionnelle à  $u(n)$ .

La suite des valeurs  $u(n)$  est alors appelée une suite géométrique de raison  $q = 1 + t$ .

#### Propriété 12

Si une suite de valeurs  $u(n)$  est une suite géométrique de raison  $q$  alors, pour tout entier naturel  $n$ ,  $u(n) = u(0) \times q^n$ .

**Exemple 13.** Reprenons l'exemple précédent de la population mondiale. Notons  $u$  la population mondiale en prenant 5 années comme unité de temps et  $n = 0$  pour l'année 1950. Alors, le taux de variation de  $u$  est  $t \approx 0,1$  donc la raison de  $u$  est  $q \approx 1,1$ . Ainsi, pour tout entier naturel  $n$ ,  $u(n) \approx 2,54 \times 1,1^n$ .

Dans ce modèle, la population en 2020 est estimée à  $u(14) \approx 2,54 \times 1,1^{14} \approx 9,64$  milliards de personnes car  $2020 = 1950 + 5 \times 14$  donc 2020 correspond à l'année  $n = 14$ . Dans le document cité précédemment, l'ONU évalue la population mondiale en 2020 à 7,79 milliards d'individus donc l'estimation est plus élevée que la réalité.

À ce rythme, la population mondiale en 2050 serait  $u(20) \approx 2,54 \times 1,1^{20} \approx 17$  milliards d'individus. Cependant, pour diverses raisons (le manque de ressources notamment) la progression sera moindre et l'ONU estime que la population mondiale en 2050 sera de l'ordre de 10 milliards d'individus<sup>(3)</sup>.

(2). Source : <https://population.un.org/wpp/Download/Standard/Population/>

(3). Source : [https://fr.wikipedia.org/wiki/Population\\_mondiale](https://fr.wikipedia.org/wiki/Population_mondiale).

## IV. — Le modèle de Malthus

### 1) Le texte de Malthus

En 1798, l'économiste anglais Robert Thomas Malthus publie son *Essai sur le principe de population* dans lequel il compare l'évolution de la population humaine et celles des ressources naturelles. Ainsi, au chapitre 1, il écrit :

« Selon la table d'Euler, si l'on se base sur une mortalité de 1 sur 36 et si naissances et morts sont dans le rapport de 3 à 1, le chiffre de la population doublera en 12 années et  $\frac{4}{5}$ . Ce n'est point là une simple supposition : c'est une réalité qui s'est produite plusieurs fois, et à de courts intervalles. Cependant, pour ne pas être taxé d'exagérations, nous nous baserons sur l'accroissement le moins rapide, qui est garanti par la concordance de tous les témoignages. Nous pouvons être certains que lorsque la population n'est arrêtée par aucun obstacle, elle double tous les vingt-cinq ans, et croît ainsi de période en période selon une progression géométrique.

Il est moins facile de mesurer l'accroissement des produits de la terre. Cependant, nous sommes sûrs que leur accroissement se fait à un rythme tout à fait différent de celui qui gouverne l'accroissement de la population. [...]

Examinons dans quelle mesure la production de notre île pourrait être accrue, dans des circonstances idéales. Supposons que grâce à une excellente administration, sachant donner de puissants encouragements aux cultivateurs, la production des terres double dans les vingt-cinq premières années (il est d'ailleurs probable que cette supposition excède la vraisemblance !) Dans les vingt-cinq années suivantes, il est impossible d'espérer que la production puisse continuer à s'accroître au même rythme, et qu'au bout de cette seconde période la production de départ aura quadruplé : ce serait heurter toutes les notions acquises sur la fécondité du sol. L'amélioration des terres stériles ne peut résulter que du travail et du temps ; à mesure que la culture s'étend, les accroissements annuels diminuent régulièrement.

Comparons maintenant l'accroissement de la population à celui de la nourriture. Supposons d'abord (ce qui est inexact) que le coefficient d'accroissement annuel ne diminue pas, mais reste constant. Que se passe-t-il ? Chaque période de vingt-cinq ans ajoute à la production annuelle de la Grande-Bretagne une quantité égale à sa production actuelle. Appliquons cette supposition à toute la terre : ainsi, à la fin de chaque période de vingt-cinq ans, une quantité de nourriture égale à celle que fournit actuellement à l'homme la surface du globe viendra s'ajouter à celle qu'elle fournissait au commencement de la même période.

Nous sommes donc en état d'affirmer, en partant de l'état actuel de la terre habitable, que les moyens de subsistance, dans les circonstances les plus favorables à la production, ne peuvent jamais augmenter à un rythme plus rapide que celui qui résulte d'une progression arithmétique.

Comparons ces deux lois d'accroissement : le résultat est frappant. Comptons pour onze millions la population de la Grande-Bretagne, et supposons que le produit actuel de son soi suffit pour la maintenir. Au bout de vingt-cinq ans, la population sera de vingt-deux millions ; et la nourriture ayant également doublé, elle suffira encore à l'entretenir. Après une seconde période de vingt-cinq ans, la population sera portée à quarante-quatre millions : mais les moyens de subsistance ne pourront plus nourrir que trente-trois millions d'habitants. Dans la période suivante, la population - arrivée à quatre-vingt-huit millions - ne trouvera des moyens de subsistance que pour la moitié de ce nombre. À la fin du premier siècle, la population sera de cent soixante-seize millions, tandis que les moyens de subsistance ne pourront suffire qu'à cinquante-cinq millions seulement.

Cent vingt et un millions d'hommes seront ainsi condamnés à mourir de faim !

Considérons maintenant la surface de la terre, en posant comme condition qu'il ne sera plus possible d'avoir recours à l'émigration pour éviter la famine. Comptons pour mille millions le nombre des habitants actuels de la Terre. La race humaine croîtra selon la progression 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256... tandis que les moyens de subsistance croîtront selon la progression 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Au bout de deux siècles, population et moyens de subsistance seront dans le rapport de 256 à 9 ; au bout de trois siècles, 4 096 à 13 ; après deux mille ans, la différence sera immense et incalculable. » <sup>(4)</sup>

(4). Source : [http://classiques.uqac.ca/classiques/malthus\\_thomas\\_robert/essais\\_population/essais\\_population.html](http://classiques.uqac.ca/classiques/malthus_thomas_robert/essais_population/essais_population.html)

## 2) Explications et liens avec les modèles linéaire et exponentiel

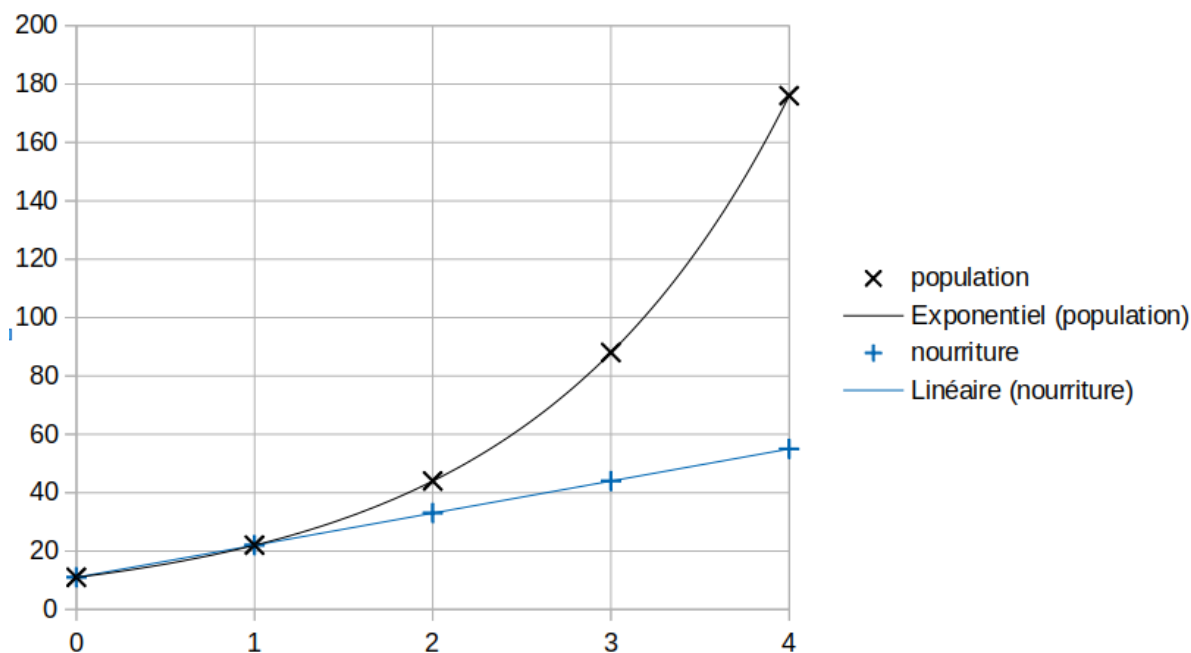
Commençons par expliquer les résultats du premier paragraphe. Malthus se base sur un taux de mortalité de  $t_m = \frac{1}{36}$  et sur un nombre de naissances égal au triple du nombre de décès c'est-à-dire un taux de natalité de  $t_n = 3 \times \frac{1}{36} = \frac{1}{12}$ . Dans ce cas, le taux de variation de la population est  $t = t_n - t_m = \frac{1}{12} - \frac{1}{36} = \frac{1}{18}$ . De plus, il fait l'hypothèse d'une croissance exponentielle de la population donc la raison de la suite géométrique associée est  $1 + t = \frac{19}{18}$ . Ainsi, chaque année la population est multipliée par  $\frac{19}{18}$  et on cherche un temps au bout duquel la population a été multipliée par 2. En admettant que ce qui a été vu pour les entiers peut s'étendre à des puissances réelles quelconques, on cherche donc un réel  $x$  tel que  $(\frac{19}{18})^x = 2$ . À l'aide d'une table de calcul (la table d'Euler), Malthus conclut que  $x = 12 + \frac{4}{5} = 12,8$  années. Avec une calculatrice, on peut en effet vérifier que  $(\frac{19}{18})^{12,8} \approx 1,998$  donc une valeur très proche de 2.

Pour ne pas être accusé d'exagérer, il décide de prendre une estimation basse en partant du fait que la population double tous les 25 ans. Il prend alors cette période comme unité de temps et estime que, si la population humaine a une évolution exponentielle, la production de nourriture a une évolution linéaire, celle-ci augmentant d'une unité tous les 25 ans.

En prenant l'exemple de la Grande-Bretagne du début du XIXe siècle, il s'intéresse alors à deux suites : la suite de valeurs  $u(n)$  de la population et la suite de valeurs  $v(n)$  des ressources alimentaires où  $n$  désigne une unité de temps c'est-à-dire une période de 25 ans. Dans son modèle,  $u$  est une suite géométrique de raison 2 et de premier terme  $u(0) = 11$  (en millions) et  $v$  est une suite arithmétique de raison 11. Il ne précise pas le premier terme de  $v$  mais suppose que  $v(0)$  est la quantité de ressources nécessaire et suffisante pour nourrir les 11 millions de la population. Fixons  $v(0) = 11$  dans une unité fictive. On a alors, pour tout entier naturel  $n$ ,  $u(n) = 11 \times 2^n$  et  $v(n) = 11 + 11n$ . Ses calculs le conduisent alors aux résultats suivants :

année	1800	1825	1850	1875	1900
$n$	0	1	2	3	4
$u(n)$	11	22	44	88	176
$v(n)$	11	22	33	44	55
$u(n) - v(n)$	0	0	11	44	121

La dernière ligne du tableau représente les nombres de personnes ne pouvant être nourries. Ainsi, Malthus conclut qu'en un siècle, 121 millions des personnes seront condamnées à la famine. On peut visualiser les deux évolutions à l'aide du graphique suivant.



### 3) Limites et critiques du modèle de Malthus

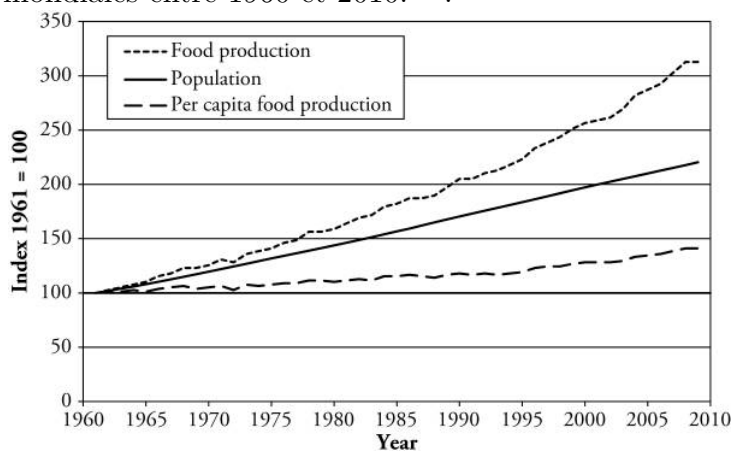
Le modèle exponentiel pour l'accroissement de la population peut s'avérer en adéquation avec la réalité mais seulement sur des temps relativement courts. Ainsi, on a vu précédemment que la croissance exponentielle de la population mondiale enregistrée ces 30 dernières années ne sera plus valable dans les années 30 ans à venir. On voit d'ailleurs que la prédiction de Malthus sur l'évolution de la population mondiale ne s'est pas réalisée car si celle-ci était bien d'environ 1 milliard d'individus en 1800, elle était d'environ 1,6 milliards en 1900<sup>(5)</sup> et non pas de 16 milliards comme le prévoyait son modèle.

Malthus lui-même reconnaît dans son ouvrage que des obstacles vont empêcher une croissance indéfinie de la population. Il classe ces obstacles en deux catégories : d'un côté, les obstacles « répressifs » qui sont tous les facteurs externes à l'espèce humaine qui engendrent une surmortalité comme la famine, la guerre, les épidémies ; d'un autre côté, les obstacles « préventifs » qui regroupent les comportements humains visant à diminuer la natalité comme la contraception, les politiques natalistes, le célibat.

Par ailleurs, le principe de progression arithmétique des ressources alimentaires est mis en doute dès 1848 par le logicien et économiste John Stuart Mill qui met en avant le fait que Malthus ne donne aucun argument pour étayer cette hypothèse de croissance linéaire<sup>(6)</sup>. De plus, l'absence de liens entre population et capacité de production sous-jacente dans le modèle Malthus a été l'objet de nombreuses critiques notamment par l'économiste danoise Ester Boserup dans son ouvrage *Évolution agricole et pression démographique*, paru en 1965. Pour elle, « la juxtaposition des croissances arithmétique des ressources et géométrique de la population n'a pas de raison d'être puisque la première est déterminée par la seconde. L'innovation, et donc la propension à produire davantage, est une fonction directe de l'effectif de la population. Ester Boserup donne à ce propos une correspondance entre des systèmes de culture (cueillette, agriculture itinérante, jachère de savane...) et des fourchettes de densité de population observées à travers de multiples exemples historiques. Si ces relations ne sont pas systématiques dans leur déroulement chronologique en termes d'effectifs de population, en revanche leur sens l'est. C'est ainsi que l'on a pu observer, notamment dans certaines régions d'Amérique latine, une régression des techniques agricoles à la suite d'une baisse des effectifs de la population. »<sup>(7)</sup>

Ceci s'est confirmé dans les faits comme le montre le graphique suivant mettant en regard la production alimentaire et la population mondiales entre 1960 et 2010.<sup>(8)</sup>

De plus, on observe un phénomène de transition démographique lorsque la population d'un pays s'enrichit. Les familles ont alors de moins en moins d'enfants, certains pays comme le Japon ou l'Allemagne connaissant même aujourd'hui une dénatalité (c'est-à-dire un nombre de naissance ne permettant pas le renouvellement de la population).<sup>(9)</sup>



Ainsi, plus qu'un problème lié au manque de ressources alimentaires, ce sont des phénomènes sociaux-culturels (enrichissement de la population, développement et accès généralisé à la contraception) qui freinent la natalité - au moins dans les pays industrialisés.

(5). Source : [https://fr.wikipedia.org/wiki/Population\\_mondiale](https://fr.wikipedia.org/wiki/Population_mondiale).

(6). John Stuart Mill, *Principes d'économie politique*, II, XI, 6.

(7). Frédéric Sandron, *Croissance économique et croissance démographique : théories, situations, politiques*, in : Charbit Y. (dir.) *Le monde en développement : démographie et enjeux socio-économiques*, 2002, Paris : La Documentation Française, 15-41. Disponible ici : [https://horizon.documentation.ird.fr/exl-doc/pleins\\_textes/divers17-09/010029446.pdf](https://horizon.documentation.ird.fr/exl-doc/pleins_textes/divers17-09/010029446.pdf)

(8). David Lam, *How the World Survived the Population Bomb : Lessons From 50 Years of Extraordinary Demographic History*, *Demography*. 2011 Nov; 48(4) : 1231-1262. Disponible ici : <https://www.ncbi.nlm.nih.gov/pmc/articles/PMC3777609/>

(9). Source : [https://fr.wikipedia.org/wiki/Thomas\\_Malthus](https://fr.wikipedia.org/wiki/Thomas_Malthus)