Le modèle linéaire – Corrigés

Exercice 1.

a) La variation absolue est $V_f - V_i = 3 - 1 = 2$ et la variation relative est $\dfrac{V_f - V_i}{V_i} = \dfrac{2}{1} = 2$.

b) La variation absolue est $V_f - V_i = 2 - 4 = -2$ et la variation relative est $\dfrac{V_f - V_i}{V_i} = \dfrac{-2}{4} = -0{,}5$.

c) La variation absolue est $V_f - V_i = 100 - 10 = 90$ et la variation relative est $\dfrac{V_f - V_i}{V_i} = \dfrac{90}{10} = 9$.

Exercice 2.

1. a) Le coefficient directeur est $a = 3$ et l'ordonnée à l'origine est $b = 1$.
   b) Le coefficient directeur est $a = 1$ et l'ordonnée à l'origine est $b = -3$.
   c) Le coefficient directeur est $a = -3$ et l'ordonnée à l'origine est $b = 2$.
2. a) L'ordonnée à l'origine est $b = 2$. De plus, la droite passe par les points A$(0\,;2)$ et B$(4\,;3)$ donc le coefficient directeur est $a = \dfrac{3-2}{4-0} = \dfrac{1}{4} = 0{,}75$.
   b) L'ordonnée à l'origine est $b = 3$. De plus, la droite passe par les points A$(0\,;3)$ et B$(2\,;2)$ donc le coefficient directeur est $a = \dfrac{2-3}{2-0} = -\dfrac{1}{2} = -0{,}5$.

Exercice 3.

a) Les variations absolues sont constantes : $4 - 1 = 3$, $7 - 4 = 3$, $10 - 7 = 3$, $13 - 10 = 3$ et $16 - 13 = 3$ donc les nombres sont les premiers termes d'une suite arithmétique de raison 3.

b) Les variations absolues ne sont pas constantes : $17 - 12 = 5$ mais $27 - 17 = 10$ donc les nombres ne sont pas les premiers termes d'une suite arithmétique.

c) Les variations absolues sont constantes : $4 - 8 = -4$, $0 - 4 = -4$, $-4 - 0 = -4$ et $-8 - (-4) = -4$ donc les nombres sont les premiers termes d'une suite arithmétique de raison -4.

Exercice 4.

1. Pour tout entier naturel n, $u(n) = 3 + 5n$.
2. Ainsi, $u(5) = 3 + 5 \times 5 = 28$ et $u(10) = 3 + 5 \times 10 = 53$.

Exercice 5. Notons $u(n)$ la population à l'année n en prenant 2010 comme année 0. Alors, u est une suite arithmétique donc, en notant a la raison de cette suite, pour tout entier naturel n, $u(n) = u(0) + na = 352\,000$. De plus, comme la population en 2014 est 356 000 et comme 2014 correspond à l'année $2014 - 2010 = 4$, on a $u(4) = 356\,000$ c'est-à-dire $352\,000 + 4a = 356\,000$. On en déduit que $4a = 356\,000 - 352\,000 = 4000$ donc $a = \dfrac{4000}{4} = 1000$. Comme $2021 - 2010 = 11$, on en déduit que la population en 2021 est $u(11) = 352\,000 + 11 \times 1000 = 363\,000$.

Exercice 6.

1. D'après l'énoncé, la variation absolue de la population est approximativement constante donc le modèle linéaire est adapté.
2. **a.** Pour tout entier naturel n, $u(n) = u(0) + 9400n$ avec $u(0) = 5\,770\,671$ donc $u(n) = 5\,770\,671 + 9400n$.

   b. Comme $1999 - 1990 = 9$, la population des Hauts-de-France en 1999 était de (environ) $u(9) = 5\,770\,671 + 9400 \times 9 = 5\,855\,271$ habitants.

c. Si le modèle reste valable au-delà de 1999, comme $2008 - 1990 = 18$, la population en 2008 doit être proche de $u(18) = 5\,770\,671 + 9400 \times 18 = 5\,939\,871$. Cette population étant en réalité $5\,931\,091$, ce qui est très proche de $u(18)$ (l'erreur est de l'ordre de $\dfrac{5\,939\,871 - 5\,931\,091}{5\,931\,091} \approx 0{,}15\%$), on peut penser que l'évolution de la population a continué à suivre le même modèle au-delà de 1999.

Exercice 7.

1. Calculons les variations absolues :

$696{,}5 - 693{,}6 = 2{,}9$ $\quad 699{,}3 - 696{,}5 = 2{,}8$ $\quad 702{,}1 - 699{,}3 = 2{,}8$ $\quad 704{,}8 - 702{,}1 = 2{,}7$

$707{,}6 - 704{,}8 = 2{,}8$ $\quad 710{,}4 - 707{,}6 = 2{,}8$ $\quad 713{,}3 - 710{,}4 = 2{,}9$ $\quad 716{,}1 - 713{,}3 = 2{,}8$.

On constate que ce évolutions ne sont pas tout à fait constantes mais qu'elles varient peu. Ainsi, le modèle linéaire est adapté à l'évolution de cette population. On approchera les différentes variations absolues par la moyenne de celles-ci :

$$\frac{2{,}9 + 2{,}8 + 2{,}8 + 2{,}7 + 2{,}8 + 2{,}8 + 2{,}9 + 2{,}8}{8} \approx 2{,}8$$

2. **a.** La suite u est une suite arithmétique de raison 2,8.

b. Pour tout entier naturel n, $u(n) = 693{,}6 + 2{,}8n$.

c. Comme $2000 - 1980 = 20$, dans ce modèle, la population européenne en 2000 est estimée à $u(20) = 693{,}6 + 2{,}8 \times 20 = 749{,}6$ millions d'habitants.

d. L'estimation obtenue est assez proche de la valeur réelle (l'erreur commise est $\dfrac{749{,}6 - 725{,}6}{725{,}6} \approx 3{,}3\%$) donc on peut considérer que la population européenne à continuer à avoir une évolution relativement constante au-delà de 1988.

Exercice 8.

1. L'ordonnée à l'origine de cette droite est (approximativement) $280\,000$.

2. La droite passe (approximativement) par les points $\mathrm{A}(0\,;280\,000)$ et $\mathrm{B}(5\,;253000)$ (qui correspond à l'année 2010) donc le coefficient directeur est

$$a \approx \frac{253000 - 280000}{5 - 0} \approx -5400.$$

3. L'équation de la droite est donc (approximativement) $y = -5400x + 280\,000$ donc, comme $2018 - 2005 = 13$, on peut estimer le nombre de mariages entre personnes de sexes différents en France en 2018 à environ $-5400 \times 13 + 280\,000 \approx 210\,000$.

4. Comme $2019 - 2005 = 14$, on peut estimer le nombre de mariages entre personnes de sexes différents en France en 2019 à environ $-5400 \times 14 + 280\,000 \approx 204\,000$. On observe un écart assez important entre l'estimation et la valeur réelle (le pourcentage d'erreur est de l'ordre de $\dfrac{228\,349 - 204\,000}{228\,349} \approx 11\%$) donc on peut en déduire que l'évolution n'a pas continué à suivre un modèle linéaire au-delà de l'année 2015. On constate d'ailleurs que les trois dernières valeurs sont quasiment égales, ce qui laisse penser à un ralentissement de la diminution du nombre de mariages.