Le modèle exponentiel – Corrigés

Exercice 1.

a) Les nombres sont les premiers termes d'une suite géométrique de raison 2 (chaque nombre est le double du précédent).

b) Les nombres sont les premiers termes d'une suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$ (chaque nombre est la moitié du précédent).

c) Les nombres ne sont pas les premiers termes d'une suite géométrique car $2 = 2 \times 1$ mais $3 \neq 2 \times 2$.

Exercice 2. Soit u une suite géométrique de premier terme $u(0) = 2$ et de raison 3.

1. Pou tout entier naturel n, $u(n) = 2 \times 3^n$.

2. $u(3) = 2 \times 3^3 = 54$ et $u(5) = 2 \times 3^5 = 486$.

Exercice 3.

1. La suite u est une suite géométrique. Notons q sa raison. Alors, $u(2) = q^2 u(0)$ avec, d'après l'énoncé, $u(0) = 25\,600$ et $u(2) = 30\,976$ donc $30\,976 = q^2 \times 25\,600$. Ainsi, $q^2 = \frac{30\,976}{25\,600} = 1{,}21$. Comme $q > 0$, on en déduit que $q = \sqrt{1{,}21} = 1{,}1$.

2. Par propriété, le taux de variation annuel t vérifie $q = 1 + t$ donc $t = q - 1 = 0{,}1$.

3. Comme $2020 = 2010 + 10$, on peut estimer la population en 2020 à $u(10) = u(0) \times q^{10} = 25\,600 \times 1{,}1^{10} \approx 66\,400$ individus.

Exercice 4.

1. La population est multipliée par le même nombre chaque année : on est donc dans une situation où le modèle exponentiel est adapté.

2. On prend l'année 1990 comme année 0 et on considère la suite u telle que $u(n)$ modélise la population de l'Occitanie à l'année n.

a. La suite u est une suite géométrique de raison $q = 1{,}0071$ et de premier terme $u(0) = 4\,546\,249$ donc, pour tout entier naturel n, $u(n) = 4\,546\,249 \times 1{,}0071^n$.

b. Comme $1999 = 1990 + 9$, la population de l'Occitanie en 1999 est d'environ $u(9) \approx 4\,845\,143$ habitants.

c. On a $2008 = 1990 + 18$ donc, si le modèle perdure, on peut estimer la population de l'Occitanie en 2008 a environ $u(18) \approx 5\,163\,687$ habitants. Or, la valeur de population en 2008 est de $5\,419\,946$ habitants ce qui fait un écart de $\frac{5419946-5163687}{5419946} \approx 5\%$. On est à la limite d'une marge d'erreur acceptable. Il est difficile de trancher ici avec seulement ces informations.

Exercice 5. Ici, il faut prendre garde au fait que les intervalles de temps ne sont pas constants (2 ans puis 4 ans puis 2 ans). On ne peut donc pas calculer les taux de variation.

Si on prend comme unité de temps 2 années, l'évolution est exponentielle si la population est multipliée par le même nombre q tous les deux ans. On doit donc avoir $q = \frac{1050}{500} = 2{,}1$, $q^2 = \frac{2700}{1050} = \frac{18}{7}$ donc $q \approx 1{,}6$ et $q = \frac{5000}{2700} = \frac{50}{27} \approx 1{,}8$.

Avec aussi peu de valeurs, il est difficile de dire si ces valeurs sont relativement constantes ou pas. Si on en prend la moyenne arithmétique, on trouve $\frac{2{,}1+1{,}6+1{,}8}{3} = 1{,}8$.

Si on considère la suite géométrique u de premier terme $u(0) = 500$ et de raison $q = 1{,}8$, on a, pour tout entier n, $u(n) = 500 \times 1{,}8^n$.

Pour $n = 0$ (année 2006), on trouve évidemment $u(0) = 500$, pour $n = 2$ (année 2008), on trouve $u(1) = 900$, pour $n = 3$ (année 2012), on trouve $u(3) \approx 2900$ et, pour $n = 4$ (année 2014), on trouve $u(4) \approx 5250$.

On n'obtient donc pas exactement les valeurs du tableau mais tout de même des nombres du même ordre de grandeur. L'affirmation selon laquelle on observe une tendance de type exponentielle est justifiée.

Remarque. L'utilisation de la moyenne arithmétique ci-dessus n'est mathématiquement pas correcte. Pour trouver un coefficient multiplicateur moyen équivalent à trois coefficients multiplicateurs successifs, il faut utiliser une autre moyenne appelée la moyenne géométrique. En l'occurrence, on cherche q tel que $q^3 = 2{,}1 \times 1{,}6 \times 1{,}8$ donc $q = \sqrt[3]{2{,}1 \times 1{,}6 \times 1{,}8} \approx 1{,}8$. On voit qu'on trouve un résultat proche de celui de la moyenne arithmétique donc le calcul ci-dessus, même s'il n'est pas fondé mathématiquement, donne un résultat correct. Cela n'est pas dû au hasard, on peut montrer que pour des coefficients assez proches de 1, les moyennes arithmétiques et géométriques sont relativement proches.

Exercice 6.

1. Au vu des graphiques, aucun des deux modèles ne semble adapté pour décrire l'évolution de la population des États-Unis sur l'ensemble de la période entre 1800 et 2010.
2. On s'intéresse à la période 1800-1860.
   - **a.** Sur la période 1800-1860, les variations absolues sont 2, 2,4, 3,3, 4,2, 5,9 et 8,2 et les variations relatives sont (environ) 0,38, 0,33, 0,34, 0,33, 0,36 et 0,35.
   - **b.** Les variations absolues ne sont pas du constantes (elles varient du simple au quadruple) alors que les variations relatives sont relativement constantes. Ainsi, le modèle exponentiel est plus adapté pour décrire l'évolution de la population entre 1800 et 1860.
   - **c.** La suite associée est une suite géométrique. Le taux de variation est relativement constant autour de 0,35 donc on peut prendre pour la raison $q = 1{,}35$.
   - **d.** Puisque $2000 = 1800 + 20 \times 10$, si l'évolution avait continué de façon similaire à cette période, la population des États-Unis en 2000 aurait été de $u(20) = 5{,}2 \times 1{,}35^{20} \approx 2100$ millions d'individus soit plus de 2 milliards de personnes.
3.
   - **a.** Sur la période 1950-1990, les variations absolues sont 28, 23,9, 23,4 et 22,1 et les variations relatives sont (environ) 0,19, 0,13, 0,12 et 0,10.
   - **b.** Les variations relatives ne sont pas du constantes (elles varient du simple au double) alors que les variations absolues sont plus stables. Ainsi, le modèle linéaire est plus adapté pour décrire l'évolution de la population entre 1950 et 1990.
   - **c.** La suite associée est une suite arithmétique. La variation relative moyenne est 24,35 donc on peut prendre pour la raison $q = 24$.
   - **d.** Comme $2020 = 1950 + 7 \times 10$, dans ce modèle, la population des États-Unis en 2020 est estimée à $u(7) = 151{,}3 + 24 \times 7 \approx 320$ millions d'habitants.
   - **e.** D'après Wikipédia[1], la population des États-Unis en 2020 est d'environ 330 millions d'habitants. L'estimation précédente est donc assez bonne avec une erreur de $\frac{330-320}{330} \approx 3\%$.

1. https ://fr.wikipedia.org/wiki/D%C3%A9mographie_des_%C3%89tats-Unis