Inférence bayésienne – Corrigés

Exercice 1.

1. Pour le TROD salivaire, la sensibilité est $\dfrac{9\,803}{10\,000} = 0{,}9803$ et la spécificité $\dfrac{100\,000 - 260}{100\,000} = 0{,}9974$.

Pour le TROD sanguin, la sensibilité est $\dfrac{9\,968}{10\,000} \approx 0{,}9968$ et la spécificité $\dfrac{100\,000 - 90}{100\,000} = 0{,}9991$.

2. a. Sur l'ensemble de la population mondiale en 2017, la proportion de personnes infectées par le VIH est $p = \dfrac{37\,000\,000}{6\,000\,000\,000} = \dfrac{37}{6000}$ donc la valeur prédictive du TROD salivaire est

$$\frac{p \times 0{,}9803}{p \times 0{,}9803 + (1-p) \times (1 - 0{,}9974)} \approx 0{,}7$$

et la valeur prédictive du TROD sanguin est

$$\frac{0{,}006 \times 0{,}997}{0{,}006 \times 0{,}997 + (1 - 0{,}006) \times (1 - 0{,}999)} \approx 0{,}873.$$

b. Sur l'ensemble de la population française en 2017, la proportion de personnes infectées par le VIH est $p = \dfrac{150\,000}{50\,000\,000} = 0{,}003$ donc la valeur prédictive du TROD salivaire est

$$\frac{0{,}003 \times 0{,}9803}{0{,}003 \times 0{,}9803 + (1 - 0{,}003) \times (1 - 0{,}9968} \approx 0{,}532$$

et la valeur prédictive du TROD sanguin est

$$\frac{0{,}003 \times 0{,}9968}{0{,}003 \times 0{,}9968 + (1 - 0{,}003) \times (1 - 0{,}9991} \approx 0{,}77.$$

c. Sur l'ensemble de la population sud-africaine en 2017, la proportion de personnes infectées par le VIH est $p = \dfrac{7\,000\,000}{35\,000\,000} = 0{,}2$ donc la valeur prédictive du TROD salivaire est

$$\frac{0{,}2 \times 0{,}9803}{0{,}2 \times 0{,}9803 + (1 - 0{,}2) \times 0{,}9974} \approx 0{,}99$$

et la valeur prédictive du TROD sanguin est

$$\frac{0{,}2 \times 0{,}9968}{0{,}2 \times 0{,}9968 + (1 - 0{,}2) \times 0{,}9991} \approx 0{,}996.$$

d. Les résultats précédents montrent l'influence de la prévalence sur la valeur prédictive positive. On voit bien à travers les trois exemples que plus la prévalence est grande, plus la valeur prédictive l'est aussi.

Exercice 2.

1. D'après l'énoncé, la sensibilité d'une mammographie est $\mathrm{Se} = \dfrac{82}{100} = 0{,}82$ et la spécificité d'une mammographie est $\mathrm{Sp} = 1 - \dfrac{9}{100} = 0{,}91$.

2.

	Anomalie détectée	Pas d'anomalie détectée	Total
Personnes malades	82	18	100
Personnes non malades	891	9 009	9 900
Total	973	9 027	10 000

3. La probabilité qu'une femme ayant une anomalie détecté soit atteinte d'un cancer du sein est $\dfrac{82}{973} \approx 0{,}084$.

4. La valeur calculée à la question précédente correspond exactement à la valeur prédictive positive. On peut le vérifier avec la formule du cours :

$$\frac{0{,}01 \times 0{,}82}{0{,}01 \times 0{,}82 + (1 - 0{,}10)(1 - 0{,}91} \approx 0{,}084.$$

La valeur prédictive négative est la probabilité qu'une personne chez qui aucun anomalie n'est détectée ne soit pas malade. Celle-ci est donc égale à $\dfrac{9009}{9027} \approx 0{,}998$.

Exercice 3. Si $\mathrm{Se} + \mathrm{Sp} = 1$ alors $\mathrm{Sp} = 1 - \mathrm{Se}$ donc la valeur prédictive du test est

$$\frac{p \times \mathrm{Se}}{p \times \mathrm{Se} + (1 - p)\mathrm{Se}} = \frac{p \times \mathrm{Se}}{p \times \mathrm{Se} + \mathrm{Se} - p \times \mathrm{Se}} = \frac{p \times \mathrm{Se}}{\mathrm{Se}} = p.$$

Ainsi, la valeur prédictive du test est égal à la prévalence donc le test n'a pas d'intérêt car la probabilité qu'un personne prise au hasard soit malade est la même qu'elle ait un test positif ou qu'elle n'est pas fait de test.

Exercice 4.

1. a. Notons D : « la personne est atteinte de la Dengue », Ch : « la personne est atteinte du Chikungunya », Z : « la personne est infectée par le virus Zika », F : « la personne a de la fièvre », Cb : « la personne a des courbatures » et O : « la personne a des douleurs oculaires ». On peut représenter la situation par l'arbre pondéré suivant :

Par indépendance, la probabilité qu'une personne présente de la fièvre et des douleurs oculaires mais pas de courbatures est

$$P(\mathrm{F} \cap \mathrm{O} \cap \overline{\mathrm{Cb}}) = P(\mathrm{F})P(\overline{\mathrm{Cb}})P(\mathrm{O}) = P(\mathrm{F})(1 - P(\mathrm{Cb}))P(\mathrm{O}).$$

Or, comme D, Ch et Z forment une partition de l'univers, d'après la formule des probabilités totales,

$$P(\mathrm{F}) = P(\mathrm{D})P_{\mathrm{D}}(\mathrm{F}) + P(\mathrm{Ch})P_{\mathrm{Ch}}(\mathrm{F}) + P(\mathrm{Z})P_{\mathrm{Z}}(\mathrm{D}) = \frac{1}{3} \times 0{,}95 + \frac{1}{3} \times 0{,}75 + \frac{1}{3} \times 0{,}75 = \frac{49}{60}.$$

On obtient, de même,

$$P(\mathrm{Cb}) = \frac{1}{3}(0{,}75 + 0{,}95 + 0{,}5) = \frac{11}{15}$$

et

$$P(\mathrm{O}) = \frac{1}{3}(0{,}5 + 0{,}25 + 0{,}5) = \frac{5}{12}.$$

donc

$$P(\mathrm{F} \cap \overline{\mathrm{Cb}} \cap \mathrm{O}) = \frac{49}{60} \times \left(1 - \frac{11}{15}\right) \times \frac{5}{12} = \frac{49}{540}.$$

Toujours par indépendance, si une personne à le Dengue, la probabilité qu'elle présente de la fièvre, des douleurs oculaires mais pas de courbatures est

$$P_{\mathrm{D}}(\mathrm{F} \cap \overline{\mathrm{Cb}} \cap \mathrm{O}) = P_{\mathrm{D}}(\mathrm{F})P_{\mathrm{D}}(1 - P_{\mathrm{D}}(\mathrm{Cb}))P_{\mathrm{D}}(\mathrm{O}) = 0{,}95 \times (1 - 0{,}75) \times 0{,}5 = \frac{19}{160}.$$

De même, la probabilité qu'elle présente de la fièvre, des douleurs oculaires mais pas de courbatures sachant qu'elle est atteinte du Chikungunya est

$$P_{\mathrm{Ch}}(\mathrm{F} \cap \overline{\mathrm{Cb}} \cap \mathrm{O}) = 0{,}75 \times (1 - 0{,}95) \times 0{,}25 = \frac{3}{320}$$

et la probabilité qu'elle présente de la fièvre, des douleurs oculaires mais pas de courbatures sachant qu'elle est infecté par le virus Zica

$$P_{\mathrm{Z}}(\mathrm{F} \cap \overline{\mathrm{Cb}} \cap \mathrm{O}) = 0{,}75 \times (1 - 0{,}5) \times 0{,}5 = \frac{3}{16}.$$

Ainsi, si la personne présente à la fois de la fièvre, pas de courbatures et des douleurs oculaires, la probabilité qu'elle soit atteinte de la Dengue est

$$P_{\mathrm{F} \cap \overline{\mathrm{Cb}} \cap \mathrm{O}}(\mathrm{D}) = \frac{P(\mathrm{D}) \times P_{\mathrm{D}}(\mathrm{F} \cap \overline{\mathrm{Cb}} \cap \mathrm{O})}{P(\mathrm{F} \cap \overline{\mathrm{Cb}} \cap \mathrm{O})} = \frac{\frac{1}{3} \times \frac{19}{160}}{\frac{49}{540}} = \frac{171}{392}.$$

De même, si la personne présente à la fois de la fièvre, pas de courbatures et des douleurs oculaires, la probabilité qu'elle soit atteinte du Chikungunya est

$$P_{\mathrm{F} \cap \overline{\mathrm{Cb}} \cap \mathrm{O}}(\mathrm{Ch}) = \frac{\frac{1}{3} \times \frac{3}{320}}{\frac{49}{540}} = \frac{27}{784}$$

et la probabilité qu'elle soit infecté par le virus Zica est

$$P_{\mathrm{F} \cap \overline{\mathrm{Cb}} \cap \mathrm{O}}(\mathrm{Z}) = \frac{\frac{1}{3} \times \frac{3}{16}}{\frac{49}{540}} = \frac{135}{196}$$

b. Dans ce cas, le plus probable est que la personne soit infecté par le virus Zica.

2. a. En reprenant la démarche précédente,

$$P(\mathrm{F}) = \frac{10}{100} \times 0{,}95 + \frac{10}{100} \times 0{,}75 + \frac{80}{100} \times 0{,}75 = \frac{77}{100},$$

$$P(\mathrm{Cb}) = \frac{10}{100} \times 0{,}75 + \frac{10}{100} \times 0{,}95 + \frac{80}{100} \times 0{,}5 = \frac{57}{100}$$

et

$$P(\mathrm{O}) = \frac{10}{100} \times 0{,}5 + \frac{10}{100} \times 0{,}25 + \frac{80}{100} \times 0{,}5 = \frac{19}{40}.$$

donc

$$P(\mathrm{F} \cap \mathrm{O} \cap \overline{\mathrm{Cb}}) = \frac{77}{100} \times \left(1 - \frac{57}{100}\right) \times \frac{19}{40} = \frac{62\,909}{400\,000}.$$

Les probabilités conditionnelles $\mathrm{F} \cap \overline{\mathrm{Cb}} \cap \mathrm{O}$ sachant D, Ch ou Z restent inchangées donc si la personne présente à la fois de la fièvre, pas de courbatures et des douleurs oculaires, la probabilité qu'elle soit atteinte de la Dengue est

$$P_{\mathrm{F} \cap \overline{\mathrm{Cb}} \cap \mathrm{O}}(\mathrm{D}) = \frac{\frac{10}{100} \times \frac{19}{160}}{\frac{62\,909}{400\,000}} = \frac{250}{3\,311},$$

la probabilité qu'elle soit atteinte du Chikungunya est

$$P_{\mathrm{F}\cap\overline{\mathrm{Cb}}\cap\mathrm{O}}(\mathrm{Ch}) = \frac{\frac{10}{100}\times\frac{3}{320}}{\frac{62\,909}{400\,000}} = \frac{375}{62\,909}$$

et la probabilité qu'elle soit infecté par le virus Zica est

$$P_{\mathrm{F}\cap\overline{\mathrm{Cb}}\cap\mathrm{O}}(\mathrm{Z}) = \frac{\frac{80}{100}\times\frac{3}{16}}{\frac{62\,909}{400\,000}} = \frac{60\,000}{62\,909}$$

b. Dans ce cas encore, le plus probable est que la personne soit infecté par le virus Zica.

Exercice 5. Notons p la prévalence de la maladie, M l'évènement « la personne est malade » et T l'évènement « la personne a un test positif ». Alors, par définition, $p = P(\mathrm{M})$, la sensibilité du test est $\mathrm{Se} = P_{\mathrm{M}}(\mathrm{T})$ et la spécificité du test est $\mathrm{Sp} = P_{\overline{\mathrm{M}}}(\overline{M})$.

Comme les évènement M et $\overline{\mathrm{M}}$ forment une partition de l'univers, par la formule des probabilités totales,

$$P(\mathrm{T}) = P(\mathrm{M})P_{\mathrm{M}}(T) + P(\overline{\mathrm{M}})P_{\overline{\mathrm{M}}}(\mathrm{T}) = p\times\mathrm{Se} + (1-p)\times(1-\mathrm{Sp}).$$

Par suite, la valeur prédictive positive du test est donc

$$V = P_{\mathrm{T}}(\mathrm{M}) = \frac{P(\mathrm{T}\cap\mathrm{M})}{P(\mathrm{T})} = \frac{P(M)P_{\mathrm{M}}(\mathrm{T})}{P(\mathrm{T})} = \frac{p\times\mathrm{Se}}{p\times\mathrm{Se} + (1-p)\times(1-\mathrm{Sp})}.$$