

III. Nombres premiers

III. Nombres premiers

Définition 15

Un entier naturel p est un nombre premier si p admet exactement deux diviseurs positifs : 1 et lui-même.

III. Nombres premiers

Définition 15

Un entier naturel p est un nombre premier si p admet exactement deux diviseurs positifs : 1 et lui-même.

Exemple 16

Les nombres premiers inférieurs ou égaux à 20 sont 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17 et 19.

III. Nombres premiers

Définition 15

Un entier naturel p est un nombre premier si p admet exactement deux diviseurs positifs : 1 et lui-même.

Exemple 16

Les nombres premiers inférieurs ou égaux à 20 sont 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17 et 19.

Remarque 17

0 n'est pas premier car il admet une infinité de diviseurs positifs (on a vu que tout entier divise 0)

III. Nombres premiers

Définition 15

Un entier naturel p est un nombre premier si p admet exactement deux diviseurs positifs : 1 et lui-même.

Exemple 16

Les nombres premiers inférieurs ou égaux à 20 sont 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17 et 19.

Remarque 17

0 n'est pas premier car il admet une infinité de diviseurs positifs (on a vu que tout entier divise 0) et 1 n'est pas premier car 1 possède un seul diviseur positif : lui-même.

III. Nombres premiers

Définition 15

Un entier naturel p est un nombre premier si p admet exactement deux diviseurs positifs : 1 et lui-même.

Exemple 16

Les nombres premiers inférieurs ou égaux à 20 sont 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17 et 19.

Remarque 17

0 n'est pas premier car il admet une infinité de diviseurs positifs (on a vu que tout entier divise 0) et 1 n'est pas premier car 1 possède un seul diviseur positif : lui-même. Ainsi, le plus petit nombre premier est 2.

III. Nombres premiers

Définition 15

Un entier naturel p est un nombre premier si p admet exactement deux diviseurs positifs : 1 et lui-même.

Exemple 16

Les nombres premiers inférieurs ou égaux à 20 sont 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17 et 19.

Remarque 17

0 n'est pas premier car il admet une infinité de diviseurs positifs (on a vu que tout entier divise 0) et 1 n'est pas premier car 1 possède un seul diviseur positif : lui-même. Ainsi, le plus petit nombre premier est 2. C'est par ailleurs le seul nombre premier pair.

III. Nombres premiers

Définition 15

Un entier naturel p est un nombre premier si p admet exactement deux diviseurs positifs : 1 et lui-même.

Exemple 16

Les nombres premiers inférieurs ou égaux à 20 sont 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17 et 19.

Remarque 17

0 n'est pas premier car il admet une infinité de diviseurs positifs (on a vu que tout entier divise 0) et 1 n'est pas premier car 1 possède un seul diviseur positif : lui-même. Ainsi, le plus petit nombre premier est 2. C'est par ailleurs le seul nombre premier pair. En effet, si n est un entier pair strictement supérieur à 2 alors n possède au moins 3 diviseurs : 1, 2 et n .

Théorème 18. — (Admis)

Tout entier naturel $n \geq 2$ est soit un nombre premier soit un produit de nombres premiers. De plus, si n n'est pas premier, il existe une seule façon d'écrire n comme un produit de nombres premiers. Cette écriture est appelée la décomposition de n en produit de facteurs premiers.

Théorème 18. — (Admis)

Tout entier naturel $n \geq 2$ est soit un nombre premier soit un produit de nombres premiers. De plus, si n n'est pas premier, il existe une seule façon d'écrire n comme un produit de nombres premiers. Cette écriture est appelée la décomposition de n en produit de facteurs premiers.

Exemple 19

1. La décomposition de 6 en produit de facteurs premiers est $6 = 2 \times 3$.

Théorème 18. — (Admis)

Tout entier naturel $n \geq 2$ est soit un nombre premier soit un produit de nombres premiers. De plus, si n n'est pas premier, il existe une seule façon d'écrire n comme un produit de nombres premiers. Cette écriture est appelée la décomposition de n en produit de facteurs premiers.

Exemple 19

1. La décomposition de 6 en produit de facteurs premiers est
 $6 = 2 \times 3$.
2. La décomposition de 100 en produit de facteurs premiers est
 $100 = 2 \times 2 \times 5 \times 5 = 2^2 \times 5^2$.

Théorème 18. — (Admis)

Tout entier naturel $n \geq 2$ est soit un nombre premier soit un produit de nombres premiers. De plus, si n n'est pas premier, il existe une seule façon d'écrire n comme un produit de nombres premiers. Cette écriture est appelée la décomposition de n en produit de facteurs premiers.

Exemple 19

1. La décomposition de 6 en produit de facteurs premiers est $6 = 2 \times 3$.
2. La décomposition de 100 en produit de facteurs premiers est $100 = 2 \times 2 \times 5 \times 5 = 2^2 \times 5^2$.
3. La décomposition de 77 en produit de facteurs premiers est $77 = 7 \times 11$.

Méthode 20

Pour déterminer la décomposition en produit de facteurs premiers d'un entier $n \geq 2$, on teste tous les diviseurs premiers successivement et autant de fois que possible.

Exemple 21

Décomposons 4312 en produit de facteurs premiers. Pour cela, Une présentation pratique est la suivante :

$$4312 \mid$$

Exemple 21

Décomposons 4312 en produit de facteurs premiers. Pour cela, Une présentation pratique est la suivante :

$$4312 \mid 2$$

Exemple 21

Décomposons 4312 en produit de facteurs premiers. Pour cela, Une présentation pratique est la suivante :

$$\begin{array}{r|l} 4312 & 2 \\ 2156 & \end{array}$$

Exemple 21

Décomposons 4312 en produit de facteurs premiers. Pour cela, Une présentation pratique est la suivante :

$$\begin{array}{r|l} 4312 & 2 \\ 2156 & 2 \end{array}$$

Exemple 21

Décomposons 4312 en produit de facteurs premiers. Pour cela, Une présentation pratique est la suivante :

$$\begin{array}{r|l} 4312 & 2 \\ 2156 & 2 \\ 1078 & \end{array}$$

Exemple 21

Décomposons 4312 en produit de facteurs premiers. Pour cela, Une présentation pratique est la suivante :

$$\begin{array}{r|l} 4312 & 2 \\ 2156 & 2 \\ 1078 & 2 \end{array}$$

Exemple 21

Décomposons 4312 en produit de facteurs premiers. Pour cela, Une présentation pratique est la suivante :

$$\begin{array}{r|l} 4312 & 2 \\ 2156 & 2 \\ 1078 & 2 \\ 539 & \end{array}$$

Exemple 21

Décomposons 4312 en produit de facteurs premiers. Pour cela, Une présentation pratique est la suivante :

$$\begin{array}{r|l} 4312 & 2 \\ 2156 & 2 \\ 1078 & 2 \\ 539 & 7 \end{array}$$

Exemple 21

Décomposons 4312 en produit de facteurs premiers. Pour cela, Une présentation pratique est la suivante :

$$\begin{array}{r|l} 4312 & 2 \\ 2156 & 2 \\ 1078 & 2 \\ 539 & 7 \\ 77 & \end{array}$$

Exemple 21

Décomposons 4312 en produit de facteurs premiers. Pour cela, Une présentation pratique est la suivante :

$$\begin{array}{r|l} 4312 & 2 \\ 2156 & 2 \\ 1078 & 2 \\ 539 & 7 \\ 77 & 7 \end{array}$$

Exemple 21

Décomposons 4312 en produit de facteurs premiers. Pour cela, Une présentation pratique est la suivante :

$$\begin{array}{r|l} 4312 & 2 \\ 2156 & 2 \\ 1078 & 2 \\ 539 & 7 \\ 77 & 7 \\ 11 & \end{array}$$

Exemple 21

Décomposons 4312 en produit de facteurs premiers. Pour cela, Une présentation pratique est la suivante :

4312		2
2156		2
1078		2
539		7
77		7
11		11

Exemple 21

Décomposons 4312 en produit de facteurs premiers. Pour cela, Une présentation pratique est la suivante :

4312	2
2156	2
1078	2
539	7
77	7
11	11
1	

Exemple 21

Décomposons 4312 en produit de facteurs premiers. Pour cela, Une présentation pratique est la suivante :

4312	2
2156	2
1078	2
539	7
77	7
11	11
1	

À droite, on met les diviseurs premiers successifs et à gauche les quotients obtenus.

Exemple 21

Décomposons 4312 en produit de facteurs premiers. Pour cela, Une présentation pratique est la suivante :

4312	2
2156	2
1078	2
539	7
77	7
11	11
1	

À droite, on met les diviseurs premiers successifs et à gauche les quotients obtenus. La colonne de droite contient la décomposition produit de facteurs premiers :

Exemple 21

Décomposons 4312 en produit de facteurs premiers. Pour cela, Une présentation pratique est la suivante :

4312		2
2156		2
1078		2
539		7
77		7
11		11
1		

À droite, on met les diviseurs premiers successifs et à gauche les quotients obtenus. La colonne de droite contient la décomposition produit de facteurs premiers : $4312 = 2^3 \times 7^2 \times 11$.

IV. Forme irréductible d'un rationnel

IV. Forme irréductible d'un rationnel

Rappels. Un nombre rationnel est un nombre r qui peut s'écrire sous la forme $r = \frac{a}{b}$ où a est un entier relatif et b est un entier naturel non nul.

IV. Forme irréductible d'un rationnel

Rappels. Un nombre rationnel est un nombre r qui peut s'écrire sous la forme $r = \frac{a}{b}$ où a est un entier relatif et b est un entier naturel non nul.

Dans la pratique, si r est négatif, on écrira souvent $r = -\frac{a}{b}$ avec a et b entiers naturels.

IV. Forme irréductible d'un rationnel

Rappels. Un nombre rationnel est un nombre r qui peut s'écrire sous la forme $r = \frac{a}{b}$ où a est un entier relatif et b est un entier naturel non nul.

Dans la pratique, si r est négatif, on écrira souvent $r = -\frac{a}{b}$ avec a et b entiers naturels. Ainsi, on écrira $-\frac{17}{25}$ au lieu de $\frac{-17}{25}$ (qui correspond à l'application stricte de la définition).

Définition 22

Soit a , b et d des entiers. On dit que d est un diviseur commun de a et b si d divise a et d divise b .

Définition 22

Soit a , b et d des entiers. On dit que d est un diviseur commun de a et b si d divise a et d divise b .

Exemple 23

Le nombre 5 est un diviseur commun de 10 et 35 car $10 = 2 \times 5$ et $35 = 7 \times 5$ donc 5 divise 10 et 35.

Définition 24

Soit a un entier relatif et b un entier naturel non nul. On dit que la fraction $\frac{a}{b}$ est irréductible si a et b n'ont pas d'autre diviseur commun positif que 1.

Définition 24

Soit a un entier relatif et b un entier naturel non nul. On dit que la fraction $\frac{a}{b}$ est irréductible si a et b n'ont pas d'autre diviseur commun positif que 1.

Exemple 25

La fraction $\frac{5}{7}$ est irréductible mais la fraction $\frac{14}{77}$ n'est pas irréductible car 14 et 77 sont tous les deux divisibles par 7.

Théorème 26. — (Admis)

Tout rationnel peut s'écrire de manière unique sous la forme d'une fraction irréductible.

Théorème 26. — (Admis)

Tout rationnel peut s'écrire de manière unique sous la forme d'une fraction irréductible.

Exemple 27

Le rationnel $\frac{14}{77}$ n'est pas écrit sous forme irréductible mais on peut l'écrire $\frac{2}{11}$ qui est une forme irréductible.

Méthode 28

Pour obtenir la forme irréductible d'un rationnel (positif), on peut utiliser les décompositions en produits de facteurs premiers du numérateur et du dénominateur.

Méthode 28

Pour obtenir la forme irréductible d'un rationnel (positif), on peut utiliser les décompositions en produits de facteurs premiers du numérateur et du dénominateur.

Exemple 29

Considérons le rationnel $r = \frac{140}{4312}$.

Méthode 28

Pour obtenir la forme irréductible d'un rationnel (positif), on peut utiliser les décompositions en produits de facteurs premiers du numérateur et du dénominateur.

Exemple 29

Considérons le rationnel $r = \frac{140}{4312}$. Pour obtenir l'écriture sous forme de fraction irréductible de r , on peut décomposer 140 et 4312 en produits de facteurs premiers.

Méthode 28

Pour obtenir la forme irréductible d'un rationnel (positif), on peut utiliser les décompositions en produits de facteurs premiers du numérateur et du dénominateur.

Exemple 29

Considérons le rationnel $r = \frac{140}{4312}$. Pour obtenir l'écriture sous forme de fraction irréductible de r , on peut décomposer 140 et 4312 en produits de facteurs premiers. On a vu, dans l'exemple 21, que $4312 = 2^3 \times 7^2 \times 11$.

Méthode 28

Pour obtenir la forme irréductible d'un rationnel (positif), on peut utiliser les décompositions en produits de facteurs premiers du numérateur et du dénominateur.

Exemple 29

Considérons le rationnel $r = \frac{140}{4312}$. Pour obtenir l'écriture sous forme de fraction irréductible de r , on peut décomposer 140 et 4312 en produits de facteurs premiers. On a vu, dans l'exemple 21, que $4312 = 2^3 \times 7^2 \times 11$. De plus, $140 = 2^2 \times 5 \times 7$ donc

Méthode 28

Pour obtenir la forme irréductible d'un rationnel (positif), on peut utiliser les décompositions en produits de facteurs premiers du numérateur et du dénominateur.

Exemple 29

Considérons le rationnel $r = \frac{140}{4312}$. Pour obtenir l'écriture sous forme de fraction irréductible de r , on peut décomposer 140 et 4312 en produits de facteurs premiers. On a vu, dans l'exemple 21, que $4312 = 2^3 \times 7^2 \times 11$. De plus, $140 = 2^2 \times 5 \times 7$ donc

$$r = \frac{140}{4312} =$$

Méthode 28

Pour obtenir la forme irréductible d'un rationnel (positif), on peut utiliser les décompositions en produits de facteurs premiers du numérateur et du dénominateur.

Exemple 29

Considérons le rationnel $r = \frac{140}{4312}$. Pour obtenir l'écriture sous forme de fraction irréductible de r , on peut décomposer 140 et 4312 en produits de facteurs premiers. On a vu, dans l'exemple 21, que $4312 = 2^3 \times 7^2 \times 11$. De plus, $140 = 2^2 \times 5 \times 7$ donc

$$r = \frac{140}{4312} = \frac{2^2 \times 5 \times 7}{2^3 \times 7^2 \times 11} =$$

Méthode 28

Pour obtenir la forme irréductible d'un rationnel (positif), on peut utiliser les décompositions en produits de facteurs premiers du numérateur et du dénominateur.

Exemple 29

Considérons le rationnel $r = \frac{140}{4312}$. Pour obtenir l'écriture sous forme de fraction irréductible de r , on peut décomposer 140 et 4312 en produits de facteurs premiers. On a vu, dans l'exemple 21, que $4312 = 2^3 \times 7^2 \times 11$. De plus, $140 = 2^2 \times 5 \times 7$ donc

$$r = \frac{140}{4312} = \frac{2^2 \times 5 \times 7}{2^3 \times 7^2 \times 11} = \frac{5}{2 \times 7 \times 11} =$$

Méthode 28

Pour obtenir la forme irréductible d'un rationnel (positif), on peut utiliser les décompositions en produits de facteurs premiers du numérateur et du dénominateur.

Exemple 29

Considérons le rationnel $r = \frac{140}{4312}$. Pour obtenir l'écriture sous forme de fraction irréductible de r , on peut décomposer 140 et 4312 en produits de facteurs premiers. On a vu, dans l'exemple 21, que $4312 = 2^3 \times 7^2 \times 11$. De plus, $140 = 2^2 \times 5 \times 7$ donc

$$r = \frac{140}{4312} = \frac{2^2 \times 5 \times 7}{2^3 \times 7^2 \times 11} = \frac{5}{2 \times 7 \times 11} = \frac{5}{154}.$$

Propriété 30

Le nombre $\sqrt{2}$ est irrationnel.

Propriété 30

Le nombre $\sqrt{2}$ est irrationnel.

Démonstration.

On donne ici une nouvelle démonstration de cette propriété.

Propriété 30

Le nombre $\sqrt{2}$ est irrationnel.

Démonstration.

On donne ici une nouvelle démonstration de cette propriété.
Supposons que $\sqrt{2}$ soit rationnel.

Propriété 30

Le nombre $\sqrt{2}$ est irrationnel.

Démonstration.

On donne ici une nouvelle démonstration de cette propriété.

Supposons que $\sqrt{2}$ soit rationnel. Alors, on peut écrire $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$ sous la forme d'une fraction irréductible.

Propriété 30

Le nombre $\sqrt{2}$ est irrationnel.

Démonstration.

On donne ici une nouvelle démonstration de cette propriété.

Supposons que $\sqrt{2}$ soit rationnel. Alors, on peut écrire $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$ sous la forme d'une fraction irréductible. En élevant au carré, on en déduit que $2 = \frac{a^2}{b^2}$

Propriété 30

Le nombre $\sqrt{2}$ est irrationnel.

Démonstration.

On donne ici une nouvelle démonstration de cette propriété.

Supposons que $\sqrt{2}$ soit rationnel. Alors, on peut écrire $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$ sous la forme d'une fraction irréductible. En élevant au carré, on en déduit que $2 = \frac{a^2}{b^2}$ donc $a^2 = 2b^2$.

Propriété 30

Le nombre $\sqrt{2}$ est irrationnel.

Démonstration.

On donne ici une nouvelle démonstration de cette propriété.

Supposons que $\sqrt{2}$ soit rationnel. Alors, on peut écrire $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$ sous la forme d'une fraction irréductible. En élevant au carré, on en déduit que $2 = \frac{a^2}{b^2}$ donc $a^2 = 2b^2$. Ainsi, a^2 est pair

Propriété 30

Le nombre $\sqrt{2}$ est irrationnel.

Démonstration.

On donne ici une nouvelle démonstration de cette propriété.

Supposons que $\sqrt{2}$ soit rationnel. Alors, on peut écrire $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$ sous la forme d'une fraction irréductible. En élevant au carré, on en déduit que $2 = \frac{a^2}{b^2}$ donc $a^2 = 2b^2$. Ainsi, a^2 est pair et donc, par la propriété 14, a est pair.

Propriété 30

Le nombre $\sqrt{2}$ est irrationnel.

Démonstration.

On donne ici une nouvelle démonstration de cette propriété.

Supposons que $\sqrt{2}$ soit rationnel. Alors, on peut écrire $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$ sous la forme d'une fraction irréductible. En élevant au carré, on en déduit que $2 = \frac{a^2}{b^2}$ donc $a^2 = 2b^2$. Ainsi, a^2 est pair et donc, par la propriété 14, a est pair. Il existe donc un entier k tel que $a = 2k$.

Propriété 30

Le nombre $\sqrt{2}$ est irrationnel.

Démonstration.

On donne ici une nouvelle démonstration de cette propriété.

Supposons que $\sqrt{2}$ soit rationnel. Alors, on peut écrire $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$ sous la forme d'une fraction irréductible. En élevant au carré, on en déduit que $2 = \frac{a^2}{b^2}$ donc $a^2 = 2b^2$. Ainsi, a^2 est pair et donc, par la propriété 14, a est pair. Il existe donc un entier k tel que $a = 2k$.

Dès lors, $a^2 = (2k)^2 = 4k^2$

Propriété 30

Le nombre $\sqrt{2}$ est irrationnel.

Démonstration.

On donne ici une nouvelle démonstration de cette propriété.

Supposons que $\sqrt{2}$ soit rationnel. Alors, on peut écrire $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$ sous la forme d'une fraction irréductible. En élevant au carré, on en déduit que $2 = \frac{a^2}{b^2}$ donc $a^2 = 2b^2$. Ainsi, a^2 est pair et donc, par la propriété 14, a est pair. Il existe donc un entier k tel que $a = 2k$. Dès lors, $a^2 = (2k)^2 = 4k^2$ donc, puisque $a^2 = 2b^2$, $4k^2 = 2b^2$.

Propriété 30

Le nombre $\sqrt{2}$ est irrationnel.

Démonstration.

On donne ici une nouvelle démonstration de cette propriété.

Supposons que $\sqrt{2}$ soit rationnel. Alors, on peut écrire $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$ sous la forme d'une fraction irréductible. En élevant au carré, on en déduit que $2 = \frac{a^2}{b^2}$ donc $a^2 = 2b^2$. Ainsi, a^2 est pair et donc, par la propriété 14, a est pair. Il existe donc un entier k tel que $a = 2k$. Dès lors, $a^2 = (2k)^2 = 4k^2$ donc, puisque $a^2 = 2b^2$, $4k^2 = 2b^2$. En simplifiant par 2, on en déduit que $2k^2 = b^2$

Propriété 30

Le nombre $\sqrt{2}$ est irrationnel.

Démonstration.

On donne ici une nouvelle démonstration de cette propriété.

Supposons que $\sqrt{2}$ soit rationnel. Alors, on peut écrire $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$ sous la forme d'une fraction irréductible. En élevant au carré, on en déduit que $2 = \frac{a^2}{b^2}$ donc $a^2 = 2b^2$. Ainsi, a^2 est pair et donc, par la propriété 14, a est pair. Il existe donc un entier k tel que $a = 2k$. Dès lors, $a^2 = (2k)^2 = 4k^2$ donc, puisque $a^2 = 2b^2$, $4k^2 = 2b^2$. En simplifiant par 2, on en déduit que $2k^2 = b^2$ donc b^2 est pair.

Propriété 30

Le nombre $\sqrt{2}$ est irrationnel.

Démonstration.

On donne ici une nouvelle démonstration de cette propriété.

Supposons que $\sqrt{2}$ soit rationnel. Alors, on peut écrire $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$ sous la forme d'une fraction irréductible. En élevant au carré, on en déduit que $2 = \frac{a^2}{b^2}$ donc $a^2 = 2b^2$. Ainsi, a^2 est pair et donc, par la propriété 14, a est pair. Il existe donc un entier k tel que $a = 2k$. Dès lors, $a^2 = (2k)^2 = 4k^2$ donc, puisque $a^2 = 2b^2$, $4k^2 = 2b^2$. En simplifiant par 2, on en déduit que $2k^2 = b^2$ donc b^2 est pair.

Toujours d'après la propriété 14,

Propriété 30

Le nombre $\sqrt{2}$ est irrationnel.

Démonstration.

On donne ici une nouvelle démonstration de cette propriété.

Supposons que $\sqrt{2}$ soit rationnel. Alors, on peut écrire $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$ sous la forme d'une fraction irréductible. En élevant au carré, on en déduit que $2 = \frac{a^2}{b^2}$ donc $a^2 = 2b^2$. Ainsi, a^2 est pair et donc, par la propriété 14, a est pair. Il existe donc un entier k tel que $a = 2k$. Dès lors, $a^2 = (2k)^2 = 4k^2$ donc, puisque $a^2 = 2b^2$, $4k^2 = 2b^2$. En simplifiant par 2, on en déduit que $2k^2 = b^2$ donc b^2 est pair.

Toujours d'après la propriété 14, on en déduit que b est pair.

Propriété 30

Le nombre $\sqrt{2}$ est irrationnel.

Démonstration.

On donne ici une nouvelle démonstration de cette propriété.

Supposons que $\sqrt{2}$ soit rationnel. Alors, on peut écrire $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$ sous la forme d'une fraction irréductible. En élevant au carré, on en déduit que $2 = \frac{a^2}{b^2}$ donc $a^2 = 2b^2$. Ainsi, a^2 est pair et donc, par la propriété 14, a est pair. Il existe donc un entier k tel que $a = 2k$. Dès lors, $a^2 = (2k)^2 = 4k^2$ donc, puisque $a^2 = 2b^2$, $4k^2 = 2b^2$. En simplifiant par 2, on en déduit que $2k^2 = b^2$ donc b^2 est pair.

Toujours d'après la propriété 14, on en déduit que b est pair. Ainsi, a et b sont tous les deux pairs

Propriété 30

Le nombre $\sqrt{2}$ est irrationnel.

Démonstration.

On donne ici une nouvelle démonstration de cette propriété.

Supposons que $\sqrt{2}$ soit rationnel. Alors, on peut écrire $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$ sous la forme d'une fraction irréductible. En élevant au carré, on en déduit que $2 = \frac{a^2}{b^2}$ donc $a^2 = 2b^2$. Ainsi, a^2 est pair et donc, par la propriété 14, a est pair. Il existe donc un entier k tel que $a = 2k$. Dès lors, $a^2 = (2k)^2 = 4k^2$ donc, puisque $a^2 = 2b^2$, $4k^2 = 2b^2$. En simplifiant par 2, on en déduit que $2k^2 = b^2$ donc b^2 est pair.

Toujours d'après la propriété 14, on en déduit que b est pair. Ainsi, a et b sont tous les deux pairs donc 2 est un diviseur commun de a et b .

Propriété 30

Le nombre $\sqrt{2}$ est irrationnel.

Démonstration.

On donne ici une nouvelle démonstration de cette propriété.

Supposons que $\sqrt{2}$ soit rationnel. Alors, on peut écrire $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$ sous la forme d'une fraction irréductible. En élevant au carré, on en déduit que $2 = \frac{a^2}{b^2}$ donc $a^2 = 2b^2$. Ainsi, a^2 est pair et donc, par la propriété 14, a est pair. Il existe donc un entier k tel que $a = 2k$. Dès lors, $a^2 = (2k)^2 = 4k^2$ donc, puisque $a^2 = 2b^2$, $4k^2 = 2b^2$. En simplifiant par 2, on en déduit que $2k^2 = b^2$ donc b^2 est pair.

Toujours d'après la propriété 14, on en déduit que b est pair. Ainsi, a et b sont tous les deux pairs donc 2 est un diviseur commun de a et b . C'est absurde car on a supposé que la fraction $\frac{a}{b}$ est irréductible.

Propriété 30

Le nombre $\sqrt{2}$ est irrationnel.

Démonstration.

On donne ici une nouvelle démonstration de cette propriété.

Supposons que $\sqrt{2}$ soit rationnel. Alors, on peut écrire $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$ sous la forme d'une fraction irréductible. En élevant au carré, on en déduit que $2 = \frac{a^2}{b^2}$ donc $a^2 = 2b^2$. Ainsi, a^2 est pair et donc, par la propriété 14, a est pair. Il existe donc un entier k tel que $a = 2k$. Dès lors, $a^2 = (2k)^2 = 4k^2$ donc, puisque $a^2 = 2b^2$, $4k^2 = 2b^2$. En simplifiant par 2, on en déduit que $2k^2 = b^2$ donc b^2 est pair.

Toujours d'après la propriété 14, on en déduit que b est pair. Ainsi, a et b sont tous les deux pairs donc 2 est un diviseur commun de a et b . C'est absurde car on a supposé que la fraction $\frac{a}{b}$ est irréductible. On conclut donc que $\sqrt{2}$ est irrationnel. $\square$

Exercise 117 p. 29

Exercice 117 p. 29

1. On a $45 = 3^2 \times 5$ et $20 = 2^2 \times 5$

Exercice 117 p. 29

1. On a $45 = 3^2 \times 5$ et $20 = 2^2 \times 5$ donc $\frac{45}{20} =$

Exercice 117 p. 29

1. On a $45 = 3^2 \times 5$ et $20 = 2^2 \times 5$ donc $\frac{45}{20} = \frac{3^2 \times 5}{2^2 \times 5} =$

Exercice 117 p. 29

1. On a $45 = 3^2 \times 5$ et $20 = 2^2 \times 5$ donc $\frac{45}{20} = \frac{3^2 \times 5}{2^2 \times 5} = \frac{9}{4}$.

Exercice 117 p. 29

1. On a $45 = 3^2 \times 5$ et $20 = 2^2 \times 5$ donc $\frac{45}{20} = \frac{3^2 \times 5}{2^2 \times 5} = \frac{9}{4}$.
2. On a $63 = 3^2 \times 7$ et $42 = 2 \times 3 \times 7$

Exercice 117 p. 29

1. On a $45 = 3^2 \times 5$ et $20 = 2^2 \times 5$ donc $\frac{45}{20} = \frac{3^2 \times 5}{2^2 \times 5} = \frac{9}{4}$.
2. On a $63 = 3^2 \times 7$ et $42 = 2 \times 3 \times 7$ donc $\frac{63}{42} =$

Exercice 117 p. 29

1. On a $45 = 3^2 \times 5$ et $20 = 2^2 \times 5$ donc $\frac{45}{20} = \frac{3^2 \times 5}{2^2 \times 5} = \frac{9}{4}$.
2. On a $63 = 3^2 \times 7$ et $42 = 2 \times 3 \times 7$ donc $\frac{63}{42} = \frac{3^2 \times 7}{2 \times 3 \times 7} =$

Exercice 117 p. 29

1. On a $45 = 3^2 \times 5$ et $20 = 2^2 \times 5$ donc $\frac{45}{20} = \frac{3^2 \times 5}{2^2 \times 5} = \frac{9}{4}$.
2. On a $63 = 3^2 \times 7$ et $42 = 2 \times 3 \times 7$ donc $\frac{63}{42} = \frac{3^2 \times 7}{2 \times 3 \times 7} = \frac{3}{2}$.

Exercice 117 p. 29

1. On a $45 = 3^2 \times 5$ et $20 = 2^2 \times 5$ donc $\frac{45}{20} = \frac{3^2 \times 5}{2^2 \times 5} = \frac{9}{4}$.
2. On a $63 = 3^2 \times 7$ et $42 = 2 \times 3 \times 7$ donc $\frac{63}{42} = \frac{3^2 \times 7}{2 \times 3 \times 7} = \frac{3}{2}$.
3. On a $121 = 11^2$ et $56 = 2^3 \times 7$ donc

Exercice 117 p. 29

1. On a $45 = 3^2 \times 5$ et $20 = 2^2 \times 5$ donc $\frac{45}{20} = \frac{3^2 \times 5}{2^2 \times 5} = \frac{9}{4}$.
2. On a $63 = 3^2 \times 7$ et $42 = 2 \times 3 \times 7$ donc $\frac{63}{42} = \frac{3^2 \times 7}{2 \times 3 \times 7} = \frac{3}{2}$.
3. On a $121 = 11^2$ et $56 = 2^3 \times 7$ donc $\frac{121}{56}$ est irréductible.

Exercice 117 p. 29

1. On a $45 = 3^2 \times 5$ et $20 = 2^2 \times 5$ donc $\frac{45}{20} = \frac{3^2 \times 5}{2^2 \times 5} = \frac{9}{4}$.
2. On a $63 = 3^2 \times 7$ et $42 = 2 \times 3 \times 7$ donc $\frac{63}{42} = \frac{3^2 \times 7}{2 \times 3 \times 7} = \frac{3}{2}$.
3. On a $121 = 11^2$ et $56 = 2^3 \times 7$ donc $\frac{121}{56}$ est irréductible.
4. On a $51 = 3 \times 17$ et $85 = 5 \times 17$

Exercice 117 p. 29

1. On a $45 = 3^2 \times 5$ et $20 = 2^2 \times 5$ donc $\frac{45}{20} = \frac{3^2 \times 5}{2^2 \times 5} = \frac{9}{4}$.
2. On a $63 = 3^2 \times 7$ et $42 = 2 \times 3 \times 7$ donc $\frac{63}{42} = \frac{3^2 \times 7}{2 \times 3 \times 7} = \frac{3}{2}$.
3. On a $121 = 11^2$ et $56 = 2^3 \times 7$ donc $\frac{121}{56}$ est irréductible.
4. On a $51 = 3 \times 17$ et $85 = 5 \times 17$ donc $\frac{51}{85} =$

Exercice 117 p. 29

1. On a $45 = 3^2 \times 5$ et $20 = 2^2 \times 5$ donc $\frac{45}{20} = \frac{3^2 \times 5}{2^2 \times 5} = \frac{9}{4}$.
2. On a $63 = 3^2 \times 7$ et $42 = 2 \times 3 \times 7$ donc $\frac{63}{42} = \frac{3^2 \times 7}{2 \times 3 \times 7} = \frac{3}{2}$.
3. On a $121 = 11^2$ et $56 = 2^3 \times 7$ donc $\frac{121}{56}$ est irréductible.
4. On a $51 = 3 \times 17$ et $85 = 5 \times 17$ donc $\frac{51}{85} = \frac{3 \times 17}{5 \times 17} =$

Exercice 117 p. 29

1. On a $45 = 3^2 \times 5$ et $20 = 2^2 \times 5$ donc $\frac{45}{20} = \frac{3^2 \times 5}{2^2 \times 5} = \frac{9}{4}$.
2. On a $63 = 3^2 \times 7$ et $42 = 2 \times 3 \times 7$ donc $\frac{63}{42} = \frac{3^2 \times 7}{2 \times 3 \times 7} = \frac{3}{2}$.
3. On a $121 = 11^2$ et $56 = 2^3 \times 7$ donc $\frac{121}{56}$ est irréductible.
4. On a $51 = 3 \times 17$ et $85 = 5 \times 17$ donc $\frac{51}{85} = \frac{3 \times 17}{5 \times 17} = \frac{3}{5}$.

Exercise 118 p. 29

Exercice 118 p. 29

1. Comme $21 = 3 \times 7$,

Exercice 118 p. 29

1. Comme $21 = 3 \times 7$, les diviseurs premiers de 21 sont 3 et 7.

Exercice 118 p. 29

1. Comme $21 = 3 \times 7$, les diviseurs premiers de 21 sont 3 et 7.
2. Comme $56 = 2^3 \times 7$,

Exercice 118 p. 29

1. Comme $21 = 3 \times 7$, les diviseurs premiers de 21 sont 3 et 7.
2. Comme $56 = 2^3 \times 7$, les diviseurs premiers de 56 sont 2 et 7.

Exercice 118 p. 29

1. Comme $21 = 3 \times 7$, les diviseurs premiers de 21 sont 3 et 7.
2. Comme $56 = 2^3 \times 7$, les diviseurs premiers de 56 sont 2 et 7.
3. Comme $256 = 2^8$,

Exercice 118 p. 29

1. Comme $21 = 3 \times 7$, les diviseurs premiers de 21 sont 3 et 7.
2. Comme $56 = 2^3 \times 7$, les diviseurs premiers de 56 sont 2 et 7.
3. Comme $256 = 2^8$, le seul diviseur premier de 256 est 2.

Exercice 118 p. 29

1. Comme $21 = 3 \times 7$, les diviseurs premiers de 21 sont 3 et 7.
2. Comme $56 = 2^3 \times 7$, les diviseurs premiers de 56 sont 2 et 7.
3. Comme $256 = 2^8$, le seul diviseur premier de 256 est 2.
4. Comme $301 = 7 \times 43$,

Exercice 118 p. 29

1. Comme $21 = 3 \times 7$, les diviseurs premiers de 21 sont 3 et 7.
2. Comme $56 = 2^3 \times 7$, les diviseurs premiers de 56 sont 2 et 7.
3. Comme $256 = 2^8$, le seul diviseur premier de 256 est 2.
4. Comme $301 = 7 \times 43$, les diviseurs premiers de 301 sont 7 et 43.

Exercise 124 p. 29

Exercice 124 p. 29

1. C'est vrai.

Exercice 124 p. 29

1. C'est vrai. Soit un entier $n > 0$.

Exercice 124 p. 29

1. C'est vrai. Soit un entier $n > 0$. Si a divise n alors $-a$ divise aussi n et $-a \neq a$.

Exercice 124 p. 29

1. C'est vrai. Soit un entier $n > 0$. Si a divise n alors $-a$ divise aussi n et $-a \neq a$. Ainsi, si on note k le nombre de diviseurs positifs de n

Exercice 124 p. 29

1. C'est vrai. Soit un entier $n > 0$. Si a divise n alors $-a$ divise aussi n et $-a \neq a$. Ainsi, si on note k le nombre de diviseurs positifs de n alors n possède $2k$ diviseurs (positifs et négatifs).

Exercice 124 p. 29

1. C'est vrai. Soit un entier $n > 0$. Si a divise n alors $-a$ divise aussi n et $-a \neq a$. Ainsi, si on note k le nombre de diviseurs positifs de n alors n possède $2k$ diviseurs (positifs et négatifs). Ainsi, n a un nombre pair de diviseurs.
2. c'est faux.

Exercice 124 p. 29

1. C'est vrai. Soit un entier $n > 0$. Si a divise n alors $-a$ divise aussi n et $-a \neq a$. Ainsi, si on note k le nombre de diviseurs positifs de n alors n possède $2k$ diviseurs (positifs et négatifs). Ainsi, n a un nombre pair de diviseurs.
2. c'est faux. Les nombres premiers entre 20 et 30 sont 23 et 29

Exercice 124 p. 29

1. C'est vrai. Soit un entier $n > 0$. Si a divise n alors $-a$ divise aussi n et $-a \neq a$. Ainsi, si on note k le nombre de diviseurs positifs de n alors n possède $2k$ diviseurs (positifs et négatifs). Ainsi, n a un nombre pair de diviseurs.
2. c'est faux. Les nombres premiers entre 20 et 30 sont 23 et 29 et les nombres premiers entre 40 et 50 sont 41, 43 et 47.

Exercice 124 p. 29

1. C'est vrai. Soit un entier $n > 0$. Si a divise n alors $-a$ divise aussi n et $-a \neq a$. Ainsi, si on note k le nombre de diviseurs positifs de n alors n possède $2k$ diviseurs (positifs et négatifs). Ainsi, n a un nombre pair de diviseurs.
2. c'est faux. Les nombres premiers entre 20 et 30 sont 23 et 29 et les nombres premiers entre 40 et 50 sont 41, 43 et 47. Il y en a donc plus entre 40 et 50 qu'entre 20 et 30.

Exercice 124 p. 29

1. C'est vrai. Soit un entier $n > 0$. Si a divise n alors $-a$ divise aussi n et $-a \neq a$. Ainsi, si on note k le nombre de diviseurs positifs de n alors n possède $2k$ diviseurs (positifs et négatifs). Ainsi, n a un nombre pair de diviseurs.
2. c'est faux. Les nombres premiers entre 20 et 30 sont 23 et 29 et les nombres premiers entre 40 et 50 sont 41, 43 et 47. Il y en a donc plus entre 40 et 50 qu'entre 20 et 30.
3. C'est faux.

Exercice 124 p. 29

1. C'est vrai. Soit un entier $n > 0$. Si a divise n alors $-a$ divise aussi n et $-a \neq a$. Ainsi, si on note k le nombre de diviseurs positifs de n alors n possède $2k$ diviseurs (positifs et négatifs). Ainsi, n a un nombre pair de diviseurs.
2. c'est faux. Les nombres premiers entre 20 et 30 sont 23 et 29 et les nombres premiers entre 40 et 50 sont 41, 43 et 47. Il y en a donc plus entre 40 et 50 qu'entre 20 et 30.
3. C'est faux. Un diviseur d'un nombre premier p est $-p$,

Exercice 124 p. 29

1. C'est vrai. Soit un entier $n > 0$. Si a divise n alors $-a$ divise aussi n et $-a \neq a$. Ainsi, si on note k le nombre de diviseurs positifs de n alors n possède $2k$ diviseurs (positifs et négatifs). Ainsi, n a un nombre pair de diviseurs.
2. c'est faux. Les nombres premiers entre 20 et 30 sont 23 et 29 et les nombres premiers entre 40 et 50 sont 41, 43 et 47. Il y en a donc plus entre 40 et 50 qu'entre 20 et 30.
3. C'est faux. Un diviseur d'un nombre premier p est $-p$, -1 , 1 et p

Exercice 124 p. 29

1. C'est vrai. Soit un entier $n > 0$. Si a divise n alors $-a$ divise aussi n et $-a \neq a$. Ainsi, si on note k le nombre de diviseurs positifs de n alors n possède $2k$ diviseurs (positifs et négatifs). Ainsi, n a un nombre pair de diviseurs.
2. c'est faux. Les nombres premiers entre 20 et 30 sont 23 et 29 et les nombres premiers entre 40 et 50 sont 41, 43 et 47. Il y en a donc plus entre 40 et 50 qu'entre 20 et 30.
3. C'est faux. Un diviseur d'un nombre premier p est $-p$, -1 , 1 et p et les nombres $-p$, -1 et 1 ne sont pas premiers.

Exercice supplémentaire. Soit p un nombre premier et x et y deux entiers naturels tels que $x^2 - y^2 = p$. Déterminer x et y .

Exercice supplémentaire. Soit p un nombre premier et x et y deux entiers naturels tels que $x^2 - y^2 = p$. Déterminer x et y .

On remarque que $x^2 - y^2 = (x - y)(x + y)$

Exercice supplémentaire. Soit p un nombre premier et x et y deux entiers naturels tels que $x^2 - y^2 = p$. Déterminer x et y .

On remarque que $x^2 - y^2 = (x - y)(x + y)$ donc
 $(x - y)(x + y) = p$.

Exercice supplémentaire. Soit p un nombre premier et x et y deux entiers naturels tels que $x^2 - y^2 = p$. Déterminer x et y .

On remarque que $x^2 - y^2 = (x - y)(x + y)$ donc $(x - y)(x + y) = p$. Comme x et y sont entiers, $x - y$ et $x + y$ aussi.

Exercice supplémentaire. Soit p un nombre premier et x et y deux entiers naturels tels que $x^2 - y^2 = p$. Déterminer x et y .

On remarque que $x^2 - y^2 = (x - y)(x + y)$ donc $(x - y)(x + y) = p$. Comme x et y sont entiers, $x - y$ et $x + y$ aussi. Ainsi, $x - y$ et $x + y$ sont des diviseurs associés de p .

Exercice supplémentaire. Soit p un nombre premier et x et y deux entiers naturels tels que $x^2 - y^2 = p$. Déterminer x et y .

On remarque que $x^2 - y^2 = (x - y)(x + y)$ donc $(x - y)(x + y) = p$. Comme x et y sont entiers, $x - y$ et $x + y$ aussi. Ainsi, $x - y$ et $x + y$ sont des diviseurs associés de p . De plus, y est positif donc $x - y \leq x + y$

Exercice supplémentaire. Soit p un nombre premier et x et y deux entiers naturels tels que $x^2 - y^2 = p$. Déterminer x et y .

On remarque que $x^2 - y^2 = (x - y)(x + y)$ donc $(x - y)(x + y) = p$. Comme x et y sont entiers, $x - y$ et $x + y$ aussi. Ainsi, $x - y$ et $x + y$ sont des diviseurs associés de p . De plus, y est positif donc $x - y \leq x + y$ donc, comme p est premier,

Exercice supplémentaire. Soit p un nombre premier et x et y deux entiers naturels tels que $x^2 - y^2 = p$. Déterminer x et y .

On remarque que $x^2 - y^2 = (x - y)(x + y)$ donc $(x - y)(x + y) = p$. Comme x et y sont entiers, $x - y$ et $x + y$ aussi. Ainsi, $x - y$ et $x + y$ sont des diviseurs associés de p . De plus, y est positif donc $x - y \leq x + y$ donc, comme p est premier, $x - y = 1$ et $x + y = p$.

Exercice supplémentaire. Soit p un nombre premier et x et y deux entiers naturels tels que $x^2 - y^2 = p$. Déterminer x et y .

On remarque que $x^2 - y^2 = (x - y)(x + y)$ donc $(x - y)(x + y) = p$. Comme x et y sont entiers, $x - y$ et $x + y$ aussi. Ainsi, $x - y$ et $x + y$ sont des diviseurs associés de p . De plus, y est positif donc $x - y \leq x + y$ donc, comme p est premier, $x - y = 1$ et $x + y = p$. On en déduit que $x = \frac{x+y+x-y}{2} = \frac{p+1}{2}$

Exercice supplémentaire. Soit p un nombre premier et x et y deux entiers naturels tels que $x^2 - y^2 = p$. Déterminer x et y .

On remarque que $x^2 - y^2 = (x - y)(x + y)$ donc $(x - y)(x + y) = p$. Comme x et y sont entiers, $x - y$ et $x + y$ aussi. Ainsi, $x - y$ et $x + y$ sont des diviseurs associés de p . De plus, y est positif donc $x - y \leq x + y$ donc, comme p est premier, $x - y = 1$ et $x + y = p$. On en déduit que $x = \frac{x+y+x-y}{2} = \frac{p+1}{2}$ et que $y = \frac{x+y-(x-y)}{2} = \frac{p-1}{2}$.

Exercice supplémentaire. Soit p un nombre premier et x et y deux entiers naturels tels que $x^2 - y^2 = p$. Déterminer x et y .

On remarque que $x^2 - y^2 = (x - y)(x + y)$ donc $(x - y)(x + y) = p$. Comme x et y sont entiers, $x - y$ et $x + y$ aussi. Ainsi, $x - y$ et $x + y$ sont des diviseurs associés de p . De plus, y est positif donc $x - y \leq x + y$ donc, comme p est premier, $x - y = 1$ et $x + y = p$. On en déduit que $x = \frac{x+y+x-y}{2} = \frac{p+1}{2}$ et que $y = \frac{x+y-(x-y)}{2} = \frac{p-1}{2}$.

On peut remarquer que si $p = 2$ en fait x et y ne sont pas entiers donc un tel x et un tel y n'existe pas.