Correction de l'exercice de géométrie repérée

1. a. Voir ci-dessous.

b. Comme les coordonnées de I sont $(1\,;0)$, la distance IA est égale à

$$\sqrt{(5-1)^2+(3-0)^2}=\sqrt{16+9}=\sqrt{25}$$

soit $\boxed{\mathrm{IA}=5}$.

2. a. On a déjà vu que $\mathrm{IA}=5$. Calculons IB :

$$\mathrm{IB}=\sqrt{(-1-1)^2+(\sqrt{21}-0)^2}=\sqrt{(-2)^2+\sqrt{21}^2}=\sqrt{4+21}=\sqrt{25}=5.$$

Ainsi, $\mathrm{IA}=\mathrm{IB}=5$ donc A et B sont sur le cercle de centre I et de rayon 5.

b. On peut ainsi construire le point B. C'est l'unique point du cercle de centre I et de rayon 5 ayant pour abscisse -1 et ayant une ordonnée positive.

3. Comme la symétrie conserve les longueurs, $\mathrm{IC}=\mathrm{IA}=5$ donc C est sur le cercle de centre I et de rayon 5. De plus, comme I est le milieu de [AC], [AC] est un diamètre du cercle. Dès lors, le triangle ABC est inscrit dans un cercle dont le diamètre est [AC] donc, par théorème, ABC est rectangle en B.

4. a. Comme I est le milieu de [AC], $x_{\mathrm{I}}=\dfrac{x_{\mathrm{A}}+x_{\mathrm{C}}}{2}$ donc $1=\dfrac{5+x_{\mathrm{C}}}{2}$ donc $5+x_{\mathrm{C}}=2$ donc $x_{\mathrm{C}}=-3y_{\mathrm{C}}=-3$ et $y_{\mathrm{I}}=\dfrac{y_{\mathrm{A}}+y_{\mathrm{C}}}{2}$ donc $0=\dfrac{3+y_{\mathrm{C}}}{2}$ donc $3+y_{\mathrm{C}}=0$ donc $y_{\mathrm{C}}=-3$
Ainsi, les coordonnées de C sont $(-3\,;-3)$.

b. Calculons les longueurs des trois côtés du triangle ABC :

$$\mathrm{AB}=\sqrt{(-1-5)^2+(\sqrt{21}-3)^2}=\sqrt{36+21-6\sqrt{21}+9}=\sqrt{66-6\sqrt{21}}$$

$$\mathrm{BC}=\sqrt{(-3-(-1))^2+(-3-\sqrt{21})^2}=\sqrt{4+9+6\sqrt{21}+21}=\sqrt{34+6\sqrt{21}}$$

$$\mathrm{AC}=\sqrt{((-3-5)^2+(-3-3)^2}=\sqrt{64+36}=\sqrt{100}=10$$

Dès lors, $\mathrm{AC}^2=100$ et $\mathrm{AB}^2+\mathrm{BC}^2=66-6\sqrt{21}+34+6\sqrt{21}=100$ donc $\mathrm{AC}^2=\mathrm{AB}^2+\mathrm{BC}^2$ et, grâce à la réciproque du théorème de Pythagore, ABC est rectangle en B.