

Exercices d'arithmétique

Exercice 1. On dit qu'un entier $n \geq 2$ est parfait si la somme de ses diviseurs positifs est égal à $2n$.

1. Montrer que 6 est le plus petit nombre parfait.
2. Montrer que 28 est parfait.

Exercice 2.

1. La somme de deux nombres entiers consécutifs est-elle toujours divisible par 2 ?
2. La somme de trois nombres entiers consécutifs est-elle toujours divisible par 3 ?
3. La somme de quatre nombres entiers consécutifs est-elle toujours divisible par 4 ?
4. La somme de cinq nombres entiers consécutifs est-elle toujours divisible par 5 ?

Exercice 3. Soit p un nombre premier.

1. Déterminer le nombre de diviseurs positifs de p^2 .
2. Déterminer le nombre de diviseurs positifs de p^3 .
3. Soit un entier $m > 1$. Déterminer le nombre de diviseurs positifs de p^m .

Exercice 4.

1. Déterminer deux nombres premiers consécutifs.
2. Peut-on trouver trois nombres premiers consécutifs ?
3. Déterminer deux nombres premiers impairs consécutifs dans la liste des nombres impairs.
4. Peut-on trouver deux nombres premiers pairs consécutifs dans la liste des nombres pairs ?

Exercice 5.

1. La somme de deux nombres premiers peut-elle être un nombre premier ?
2. La somme de trois nombres premiers peut-elle être un nombre premier ?
3. Le produit de deux nombres premiers peut-il être un nombre premier ?

Exercice 6. Soit n un entier. On pose $A = 3n + 4$ et $B = 7n + 9$. On suppose que d est un diviseur positif commun à A et B .

1. Montrer que d divise $7A - 3B$.
2. En déduire la valeur de d .

Exercice 7. Soit n un entier. On pose $A = 5n + 2$ et $B = 3n + 1$. En s'inspirant de l'exercice précédent, déterminer tous les diviseurs positifs commun à A et B .

Exercice 8. Déterminer une suite de 10 nombres entiers consécutifs supérieurs ou égaux à 2 dont aucun n'est premier.

Exercice 9. En utilisant l'unicité de la décomposition en produit de facteurs premiers, montrer que, pour tout nombre premier p , $\sqrt{p}$ est irrationnel.