

Corrigés des exercices de la fiche

Exercice 1. On dit qu'un entier $n \geq 2$ est parfait si la somme de ses diviseurs positifs est égal à $2n$.

1. Les diviseurs positifs de 2 sont 1 et 2 et $1 + 2 = 3 \neq 2 \times 2$ donc 2 n'est pas parfait.
Les diviseurs positifs de 3 sont 1 et 3 et $1 + 3 = 4 \neq 2 \times 3$ donc 3 n'est pas parfait.
Les diviseurs positifs de 4 sont 1, 2 et 4 et $1 + 2 + 4 = 7 \neq 2 \times 4$ donc 4 n'est pas parfait.
Les diviseurs positifs de 5 sont 1 et 5 et $1 + 5 = 6 \neq 2 \times 5$ donc 5 n'est pas parfait.
Les diviseurs positifs de 6 sont 1, 2, 3 et 6 et $1 + 2 + 3 + 6 = 12 \neq 2 \times 6$ donc 6 est parfait.
On conclut que 6 est le plus petit nombre parfait.
2. Les diviseurs positifs de 28 sont 1, 2, 4, 7, 14 et 28 et $1 + 2 + 4 + 7 + 14 + 28 = 56 = 2 \times 28$ donc 28 est parfait.

Exercice 2.

1. On peut remarquer que $0 + 1 = 1$ n'est pas divisible par 2. En fait, si a et b sont deux entiers consécutifs alors l'un est pair et l'autre impair. Ainsi, l'un s'écrit $2k$ et l'autre $2k' + 1$ où k et k' sont des entiers. Dès lors, $2k + (2k' + 1) = 2(k + k') + 1$ est un nombre impair. Ainsi, la somme de deux nombres entiers consécutifs n'est jamais divisible par 2.
2. Soit a , b et c trois entiers consécutifs. Alors, $b = a + 1$ et $c = b + 1 = a + 2$ donc la somme vaut $a + (a + 1) + (a + 2) = 3a + 3 = 3(a + 1)$. Ainsi, la somme de trois nombres entiers consécutifs est toujours divisible par 3.
3. On peut remarquer que $0 + 1 + 2 + 3 = 6$ n'est pas divisible par 4. Ainsi, la somme de quatre nombres entiers consécutifs n'est pas toujours divisible 4. (En fait, on peut démontrer qu'elle ne l'est jamais).
4. Soit a , b , c , d et e cinq entiers consécutifs. Alors, $b = a + 1$, $c = b + 1 = a + 2$, $d = c + 1 = a + 3$ et $e = d + 1 = a + 4$ donc la somme vaut $a + (a + 1) + (a + 2) + (a + 3) + (a + 4) = 5a + 10 = 5(a + 2)$. Ainsi, la somme de cinq nombres entiers consécutifs est toujours divisible par 5.

Exercice 3. 1. Comme p est premier, les diviseurs positifs de p^2 sont 1, p et p^2 : il y en a donc 3.

2. Comme p est premier, les diviseurs positifs de p^3 sont 1, p , p^2 et p^3 : il y en a donc 4.

3. Comme p est premier, les diviseurs positifs de p^m sont 1, p , p^2 , ..., p^{m-1} et p^m : il y en a donc $m + 1$.

Exercice 4.

1. 2 et 3 sont deux nombres premiers consécutifs (et ce sont les seuls).
2. Soit a , b et c trois entiers tels que a est premier. Alors, $a \geq 2$. De plus, comme b et c sont consécutifs, l'un d'eux est pair et strictement supérieur à 2 : il n'est donc pas premier. On conclut donc que trois entiers consécutifs ne peuvent pas tous les trois être premiers.
3. 3 et 5 sont deux nombres premiers consécutifs dans la liste des nombres impairs.
4. Le seul nombre premier pair est 2 donc il n'y a pas deux nombres premiers consécutifs dans la liste des nombres pairs.

Exercice 5.

1. La réponse est oui : par exemple $2 + 3 = 5$ est premier.
2. La réponse est oui : par exemple, $3 + 5 + 11 = 19$ est premier.
3. La réponse est non : en effet, si p et q sont deux nombres premiers alors le produit pq possède au moins trois diviseurs positifs : 1, p et q sont pq n'est pas premier.

Exercice 6. 1. Comme d divise A , il existe un entier k tel que $A = kd$ et, comme d divise B , il existe un entier k' tel que $A = k'd$. Ainsi, $7A - 3B = 7(kd) - 3(k'd) = (7k - 3k')d$ et, comme k et k' sont des entiers, $7k - 3k'$ est un entier donc d divise $7A - 3B$.

2. Or, $7A - 3B = 7(3n + 4) - 3(7n + 9) = 21n + 28 - (21n + 27) = 21n + 28 - 21n - 27 = 1$. Ainsi, d'après la question précédente, d divise 1 donc, comme $d > 0$, on conclut que $d = 1$.

Exercice 7. Supposons que d soit un diviseur positif commun à A et B . Alors, comme d divise A , il existe un entier k tel que $A = kd$ et, comme d divise B , il existe un entier k' tel que $A = k'd$. Ainsi, $3A - 5B = 3(kd) - 5(k'd) = (3k - 5k')d$ et, comme k et k' sont des entiers, $3k - 5k'$ est un entier donc d divise $3A - 5B$. Or, $3A - 5B = 3(5n + 2) - 5(3n + 1) = 15n + 6 - (15n + 5) = 15n + 6 - 15n - 5 = 1$. Ainsi, d'après la question précédente, d divise 1 donc, comme $d > 0$, on conclut que $d = 1$.

Exercice 8. Considérons l'entier $n = 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 \times 7 \times 8 \times 9 \times 10 \times 11$. Alors, aucun des entiers $n + 2, n + 3, n + 4, n + 5, n + 6, n + 7, n + 8, n + 9, n + 10$ et $n + 11$ n'est premier car, pour tout nombre entier k compris entre 2 et 11, k divise a et k divise k donc k divise $n + k$ donc $n + k$ possède au moins trois diviseurs : 1, k et $n + k$.

Exercice 9. Soit p un nombre premier. Supposons que $\sqrt{p}$ soit irrationnel. Alors, il existe deux entiers naturels non nuls a et b tels que $\sqrt{p} = \frac{a}{b}$ donc, en élevant au carré, $p = \frac{a^2}{b^2}$ et ainsi $pb^2 = a^2$. Si on note k la puissance de p dans la décomposition de a en produit de facteurs premiers et k' la puissance de p dans la décomposition de b en produit de facteurs premiers alors il existe des entiers m et m' qui ne sont pas divisible par p et tels que $a = p^k m$ et $b = p^{k'} m'$. Alors, $pb^2 = p^{2k'+1} m'^2$ et $a^2 = p^{2k} m^2$. Ainsi, $p^{2k'+1} m'^2 = p^{2k} m^2$ où m et m' sont deux entiers qui ne sont pas divisible par p . Ainsi, par unicité de la décomposition en produit de facteurs premiers, $p^{2k'+1} = p^{2k}$ et donc $2k' + 1 = 2k$. Ceci est absurde car $2k$ est pair alors que $2k' + 1$ est impair. On conclut donc que $\sqrt{p}$ est irrationnel.