

Exercice 73 p. 111

2. Posons $A(x) = (2 - 3x)(4x - 1)$.

$A(x)$ est le produit de deux facteurs affines : $2 - 3x$ et $4x - 1$.

Signe de $2 - 3x$

Ici, $m = -3$ et $p = 2$ donc $-\frac{p}{m} = -\frac{2}{-3} = \frac{2}{3}$. Comme $m < 0$, on en déduit que $2 - 3x \geq 0$ si $x \leq \frac{2}{3}$ et $2 - 3x \leq 0$ si $x \geq \frac{2}{3}$.

Signe de $4x - 1$

Ici, $m = 4$ et $p = -1$ donc $-\frac{p}{m} = -\frac{-1}{4} = \frac{1}{4}$. Comme $m > 0$, on en déduit que $4x - 1 \leq 0$ si $x \leq \frac{1}{4}$ et $4x - 1 \geq 0$ si $x \geq \frac{1}{4}$.

Signe de $A(x)$

On rassemble les résultats précédents dans un tableau de signe.

x	$-\infty$	$\frac{1}{4}$	$\frac{2}{3}$	$+\infty$	
signe de $2-3x$	$+$	$+$	0	$-$	
signe de $4x-1$	$-$	0	$+$	$+$	
signe de $A(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$

Ainsi, on conclut que l'ensemble des solutions de $A(x) \leq 0$ est $]-\infty; \frac{1}{4}] \cup [\frac{2}{3}; +\infty[$.

3. Posons $B(x) = (\frac{1}{2}x + 3)(\frac{-2}{3}x - \frac{1}{2})$.

$B(x)$ est le produit de deux facteurs affines : $\frac{1}{2}x + 3$ et $\frac{-2}{3}x - \frac{1}{2}$.

Signe de $\frac{1}{2}x + 3$

Ici, $m = \frac{1}{2}$ et $p = 3$ donc $-\frac{p}{m} = -\frac{3}{\frac{1}{2}} = -6$. Comme $m > 0$, on en déduit que $\frac{1}{2}x + 3 \leq 0$ si $x \leq -6$ et $\frac{1}{2}x + 3 \geq 0$ si $x \geq -6$.

Signe de $\frac{-2}{3}x - \frac{1}{2}$

Ici, $m = \frac{-2}{3}$ et $p = -\frac{1}{2}$ donc $-\frac{p}{m} = -\frac{-\frac{1}{2}}{\frac{-2}{3}} = -\frac{3}{4}$. Comme $m < 0$, on en déduit que $\frac{-2}{3}x - \frac{1}{2} \leq 0$ si $x \geq -\frac{3}{4}$ et $\frac{-2}{3}x - \frac{1}{2} \geq 0$ si $x \leq -\frac{3}{4}$.

Signe de $B(x)$

On rassemble les résultats précédents dans un tableau de signe.

x	$-\infty$	-6	$-\frac{3}{4}$	$+\infty$
signe de $\frac{1}{2}x + 3$	$-$	0	$+$	$+$
signe de $\frac{-2}{3}x - \frac{1}{2}$	$+$	$+$	0	$-$
signe de $B(x)$	$-$	0	0	$-$

Ainsi, on conclut que l'ensemble des solutions de $B(x) < 0$ est $]-\infty; -6[\cup]-\frac{3}{4}; +\infty[$.

Exercice 74 p. 111

Dans cet exercice, il faut d'abord se ramener à une étude de signe en factorisant.

1. Notons (I) l'inéquation $(5x - 3)(2x + 1) > (2x + 1)(x - 4)$. Alors,

$$\begin{aligned}(I) &\Leftrightarrow (5x - 3)(2x + 1) - (2x + 1)(x - 4) > 0 \Leftrightarrow (2x + 1)[(5x - 3) - (x - 4)] > 0 \\ &\Leftrightarrow (2x + 1)(5x - 3 - x + 4) > 0 \Leftrightarrow (2x + 1)(4x + 1) > 0\end{aligned}$$

Posons $C(x) = (2x + 1)(4x + 1)$. Ainsi, résoudre l'inéquation (I) revient à chercher les réels x tels que $C(x) > 0$.

$C(x)$ est le produit de deux facteurs affines : $2x + 1$ et $4x + 1$.

Signe de $2x + 1$

Ici, $m = 2$ et $p = 1$ donc $-\frac{p}{m} = -\frac{1}{2} = -\frac{1}{2}$. Comme $m > 0$, on en déduit que $2x + 1 \leq 0$ si $x \leq -\frac{1}{2}$ et $2x + 1 \geq 0$ si $x \geq -\frac{1}{2}$.

Signe de $4x + 1$

Ici, $m = 4$ et $p = 1$ donc $-\frac{p}{m} = -\frac{1}{4} = -\frac{1}{4}$. Comme $m > 0$, on en déduit que $4x + 1 \leq 0$ si $x \leq -\frac{1}{4}$ et $4x + 1 \geq 0$ si $x \geq -\frac{1}{4}$.

Signe de $C(x)$

On rassemble les résultats précédents dans un tableau de signe.

x	$-\infty$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{4}$	$+\infty$
signe de $x + 1$		$-$	0	$+$
signe de $4x + 1$	$-$	$-$	0	$+$
signe de $C(x)$	$+$	0	$-$	$+$

Ainsi, on conclut que l'ensemble des solutions de $C(x) > 0$ et donc de l'inéquation (I) est $]-\infty; -\frac{1}{2}[\cup]-\frac{1}{4}; +\infty[$.

2. Notons (J) l'inéquation $(3x + 2)(-6x - 1) \geq (3x + 2)^2$. Alors,

$$\begin{aligned}(J) &\Leftrightarrow (3x + 2)(-6x - 1) - (3x + 2)(3x + 2) \geq 0 \Leftrightarrow (3x + 2)[(-6x - 1) - (3x + 2)] \geq 0 \\ &\Leftrightarrow (3x + 2)(-6x - 1 - 3x - 2) \geq 0 \Leftrightarrow (3x + 2)(-9x - 3) \geq 0\end{aligned}$$

Posons $D(x) = (3x + 2)(-9x - 3)$. Ainsi, résoudre l'inéquation (J) revient à chercher les réels x tels que $D(x) \geq 0$.

$D(x)$ est le produit de deux facteurs affines : $3x + 2$ et $-9x - 3$.

Signe de $3x + 2$

Ici, $m = 3$ et $p = 2$ donc $-\frac{p}{m} = -\frac{2}{3}$. Comme $m > 0$, on en déduit que $3x + 2 \leq 0$ si $x \leq -\frac{2}{3}$ et $3x + 2 \geq 0$ si $x \geq -\frac{2}{3}$.

Signe de $-9x - 3$

Ici, $m = -9$ et $p = -3$ donc $-\frac{p}{m} = -\frac{-3}{-9} = -\frac{1}{3}$. Comme $m < 0$, on en déduit que $-9x - 3 \geq 0$ si $x \leq -\frac{1}{3}$ et $-9x - 3 \leq 0$ si $x \geq -\frac{1}{3}$.

Signe de $D(x)$

On rassemble les résultats précédents dans un tableau de signe.

x	$-\infty$	$-\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$+\infty$
signe de $3x + 2$	$-$	0	$+$	$+$
signe de $-9x - 3$	$+$	$+$	0	$-$
signe de $D(x)$	$-$	0	0	$-$

Ainsi, on conclut que l'ensemble des solutions de $D(x) \geq 0$ et donc de l'inéquation (J) est $\left[-\frac{2}{3}; -\frac{1}{3}\right]$.

Exercice 76 p. 111

Dans cet exercice, on commence par se ramener à une étude de signe en mettant au même dénominateur.

1. Notons (K) l'inéquation $\frac{x-4}{x+8} > -1$. Alors,

$$(K) \Leftrightarrow \frac{x-4}{x+8} + 1 > 0 \Leftrightarrow \frac{x-4}{x+8} + \frac{x+8}{x+8} > 0 \Leftrightarrow \frac{x-4+x+8}{x+8} > 0 \Leftrightarrow \frac{2x+4}{x+8} > 0$$

Posons $E(x) = \frac{2x+4}{x+8}$. Ainsi, résoudre l'inéquation (K) revient à chercher les réels x tels que $E(x) > 0$.

$E(x)$ est le quotient de termes affines : $2x+4$ et $x+8$.

Signe de $2x+4$

Ici, $m = 2$ et $p = 4$ donc $-\frac{p}{m} = -\frac{4}{2} = -2$. Comme $m > 0$, on en déduit que $2x+4 \leq 0$ si $x \leq -2$ et $2x+4 \geq 0$ si $x \geq -2$.

Signe de $x+8$

Ici, $m = 1$ et $p = 8$ donc $-\frac{p}{m} = -\frac{8}{1} = -8$. Comme $m > 0$, on en déduit que $x+8 \leq 0$ si $x \leq -8$ et $x+8 \geq 0$ si $x \geq -8$.

Signe de $E(x)$

On rassemble les résultats précédents dans un tableau de signe en prenant bien garde au fait que le dénominateur de la fraction ne doit pas s'annuler.

x	$-\infty$	-8	-2	$+\infty$
signe de $2x+4$	$-$	0	$+$	$+$
signe de $x+8$	$-$	$-$	0	$+$
signe de $E(x)$	$+$	0	$-$	$+$

Ainsi, on conclut que l'ensemble des solutions de $E(x) > 0$ et donc de l'inéquation (K) est $]-\infty; -8[\cup]-2; +\infty[$.

2. Notons (L) l'inéquation $\frac{x}{2x-10} \geq 2$. Alors,

$$(L) \Leftrightarrow \frac{x}{2x-10} - 2 \geq 0 \Leftrightarrow \frac{x}{2x-10} - \frac{2(2x-10)}{2x-10} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{x-4x+20}{2x-10} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{-3x+20}{2x-10} \geq 0$$

Posons $F(x) = \frac{-3x + 20}{2x - 10}$. Ainsi, résoudre l'inéquation (L) revient à chercher les réels x tels que $F(x) \geq 0$.

$F(x)$ est le quotient de termes affines : $-3x + 20$ et $2x - 10$.

Signe de $-3x + 20$

Ici, $m = -3$ et $p = 20$ donc $-\frac{p}{m} = -\frac{20}{-3} = \frac{20}{3}$. Comme $m < 0$, on en déduit que $-3x + 20 \geq 0$ si $x \leq \frac{20}{3}$ et $-3x + 20 \leq 0$ si $x \geq \frac{20}{3}$.

Signe de $2x - 10$

Ici, $m = 2$ et $p = -10$ donc $-\frac{p}{m} = -\frac{-10}{2} = 5$. Comme $m > 0$, on en déduit que $2x - 10 \leq 0$ si $x \leq 5$ et $2x - 10 \geq 0$ si $x \geq 5$.

Signe de $F(x)$

On rassemble les résultats précédents dans un tableau de signe en prenant bien garde au fait que le dénominateur de la fraction ne doit pas s'annuler.

x	$-\infty$	5	$\frac{20}{3}$	$+\infty$
signe de $-3x + 20$	+	+	0	−
signe de $2x - 10$	−	0	+	+
signe de $F(x)$	−	+	0	−

Ainsi, on conclut que l'ensemble des solutions de $F(x) \geq 0$ et donc de l'inéquation (L) est $\left] 5 ; \frac{20}{3} \right]$.