Corrigés des exercices donnés le mercredi 27 mai

Exercice 26 p. 229

1. On a

$$\begin{cases} -3x+4y=5 & L_1 \\ 3x+2y=7 & L_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (-3x+4y)+(3x+2y)=5+7 & L_1 \leftarrow L_1+L_2 \\ (-3x+4y)-2(3x+2y)=5-2\times 7 & L_1 \leftarrow L_1-2L_2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 6y=12 \\ -9x=-9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=2 \\ x=1 \end{cases}$$

Ainsi, l'unique solution du système est $(1\,;2)$.

Exercice 27 p. 229

1. On a

$$\begin{cases} -x+2y=-1 \\ 3x-5y=7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2y+1=x \\ 3(2y+1)-5y=7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2y+1 \\ 6y+3-5y=7 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=2y+1 \\ y=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=9 \\ y=4 \end{cases}$$

Ainsi, l'unique solution du système est $(9\,;4)$.

Exercice 28 p. 229.

1. On a $\overrightarrow{\mathrm{AB}}\,(7\,;-7)$ donc

$$M\,(x\,;y) \in (\mathrm{AB}) \Leftrightarrow \det(\overrightarrow{\mathrm{A}M}\,;\overrightarrow{\mathrm{AB}})=0 \Leftrightarrow (x+5)\times(-7)-(y-7)\times 7=0 \Leftrightarrow -7x-35-7y+49=0$$

donc une équation de (AB) est $-7x-7y+14=0$ soit encore $x+y-2=0$.
On a $\overrightarrow{\mathrm{CD}}\,(4\,;2)$ donc

$$M\,(x\,;y) \in (\mathrm{CD}) \Leftrightarrow \det(\overrightarrow{\mathrm{C}M}\,;\overrightarrow{\mathrm{CD}})=0 \Leftrightarrow (x+1)\times 2-(y-6)\times 4=0 \Leftrightarrow 2x+2-4y+24=0$$

donc une équation de (CD) est $2x-4y+26=0$ soit encore $x-2y+13=0$.
Comme $1\times(-2)-1\times 1=-3\neq 0$, les droites (AB) et (CD) ne sont pas parallèles et elles ont donc un unique pour d'intersection I. Pour déterminer les coordonnées de I, on résout le système suivant :

$$\begin{cases} x+y-2=0 & L_1 \\ x-2y+13=0 & L_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2(x+y-2)+(x-2y+13)=0 & L_1 \leftarrow 2L_1+L_2 \\ (x+y-2)-(x-2y+13)=0 & L_1 \leftarrow L_1-L_2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x+9=0 \\ 3y-15=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-3 \\ y=5 \end{cases}$$

Ainsi, les coordonnées de I sont $(-3\,;5)$.

Exercice 79 p. 235

1. Considérons les droites $d : 3x + y = 4$ et $d' : 3x - y = 1$. On a $3 \times (-1) - 1 \times 3 = -6 \neq 0$ donc d et d' sont sécantes et ainsi le système possède une unique solution.
2. Considérons les droites $d : -x+2y = 0$ et $d' : -0{,}5x+y = 1$. On a $-1\times1-2\times(-0{,}5) = 0$ donc d et d' sont parallèles. De plus, le point $\mathrm{A}(0\,;0)$ appartient à d mais pas à d' donc d et d' sont strictement parallèles. Ainsi, le système ne possède aucune solution.
3. Considérons les droites $d : 4x+7y = -2$ et $d' : -2x-3{,}5y = 1$. On a $4\times(-3{,}5)-7\times(-2) = 0$ donc d et d' sont parallèles. De plus, le point $\mathrm{A}(-0{,}5\,;0)$ appartient à d et à d' donc $d' = d$. Ainsi, le système possède une infinité de solutions.

   Remarque. On pouvait aussi remarquer qu'en multipliant par -2, l'équation $-2x-3{,}5y = 1$ est équivalente à l'équation $4x + 7y = -2$.
4. Considérons les droites $d : -2x + 3y = 5$ et $d' : 3x - 2y = 5$. On a $(-2) \times (-2) - 3 \times 3 = -5 \neq 0$ donc d et d' sont sécantes et ainsi le système possède une unique solution.

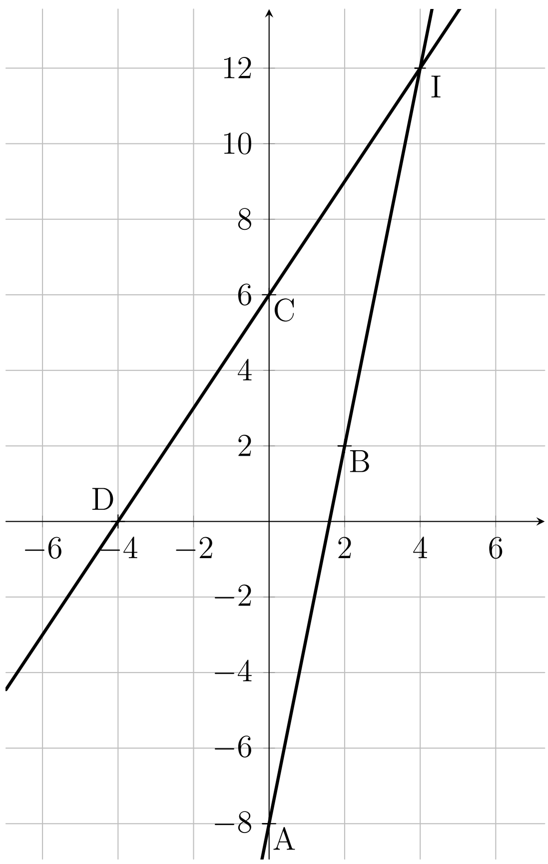
Exercice 83 p. 236.

1. Considérons les droites $d : 5x - y = 8$ et $d' : -3x + 2y = 12$.

   Déterminons deux points de d : pour $x = 0$, on trouve $y = -8$ et, pour $x = 2$, on trouve $y = 2$ donc les points $\mathrm{A}(0\,;-8)$ et $\mathrm{B}(2\,;2)$ appartiennent à d.

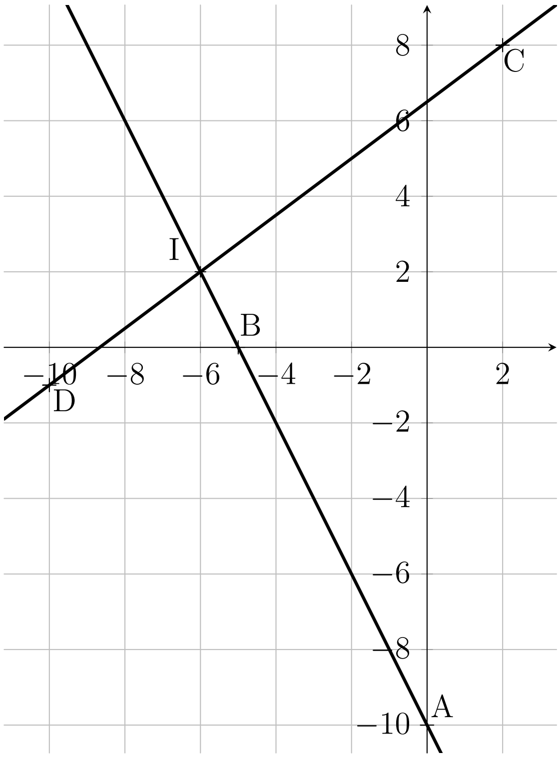
   Déterminons deux points de d' : pour $x = 0$, on trouve $y = 6$ et, pour $y = 0$, on trouve $x = -4$ donc les points $\mathrm{C}(0\,;6)$ et $\mathrm{D}(-4\,;0)$ appartiennent à d'.

   On peut donc tracer d et d' :



   Graphiquement, les coordonnées du point d'intersection I de d et d' sont $(4\,;12)$. Ainsi, on conclut que, graphiquement, l'unique solution du système est $(4\,;12)$.

2. Considérons les droites $d : 2x + y = -10$ et $d' : -1{,}5x + 2y = 13$.
Déterminons deux points de d : pour $x = 0$, on trouve $y = -10$ et, pour $y = 0$, on trouve $x = -5$ donc les points $\mathrm{A}(0\,;-10)$ et $\mathrm{B}(-5\,;0)$ appartiennent à d.
Déterminons deux points de d' : pour $x = 2$, on trouve $y = 8$ et, pour $y = -1$, on trouve $x = -10$ donc les points $\mathrm{C}(2\,;8)$ et $\mathrm{D}(-10\,;-1)$ appartiennent à d'.
On peut donc tracer d et d' :



Graphiquement, les coordonnées du point d'intersection I de d et d' sont $(-6\,;2)$. Ainsi, on conclut que, graphiquement, l'unique solution du système est $(-6\,;2)$.

Exercice 89 p. 237

1. Les coordonnées de A sont $(-4\,;2)$ et celles de K sont $(3\,;0)$. Comme $x_{\mathrm{A}} \neq x_{\mathrm{K}}$, l'équation réduite de (AK) est de la forme $y = mx + p$. De plus,

$$m = \frac{0-2}{3-(-4)} = \frac{-2}{7} = -\frac{2}{7}$$

donc l'équation réduite de (AK) est de la forme $y = -\frac{2}{7}x + p$. De plus, en utilisant les coordonnées de K, $0 = -\frac{2}{7} \times 3 + p$ donc $p = \frac{6}{7}$. Ainsi, (AK): $y = -\frac{2}{7}x + \frac{6}{7}$.
Les coordonnées de B sont $(4\,;-2)$ et celles de J sont $(-1\,;2)$. Comme $x_{\mathrm{B}} \neq x_{\mathrm{J}}$, l'équation réduite est de la forme $y = mx + p$. De plus,

$$m = \frac{2-(-2)}{-1-4} = \frac{4}{-5} = -\frac{4}{5}$$

donc l'équation réduite de (BJ) est de la forme $y = -\frac{4}{5}x + p$. De plus, en utilisant les coordonnées de J, $2 = -\frac{4}{5} \times (-1) + p$ donc $p = 2 - \frac{4}{5} = \frac{6}{5}$. Ainsi, (BJ): $y = -\frac{4}{5}x + \frac{6}{5}$.

2. Comme $-\frac{2}{7} \neq -\frac{4}{5}$, les droites (AK) et (BJ) sont sécantes en un point G. Pour déterminer les coordonnées de G, on résout le système suivant :

$$\begin{cases} y = -\frac{2}{7}x + \frac{6}{7} \\ y = -\frac{4}{5}x + \frac{6}{5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -\frac{2}{7}x + \frac{6}{7} \\ -\frac{2}{7}x + \frac{6}{7} = -\frac{4}{5}x + \frac{6}{5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -\frac{2}{7}x + \frac{6}{7} \\ -10x + 30 = -28x + 42 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = -\frac{2}{7}x + \frac{6}{7} \\ 18x = 12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -\frac{2}{7}x + \frac{6}{7} \\ x = \frac{2}{3} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = -\frac{2}{7} \times \frac{2}{3} + \frac{6}{7} \\ x = \frac{2}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{2}{3} \\ x = \frac{2}{3} \end{cases}$$

Ainsi, les coordonnées de G sont $\left(\frac{2}{3}\,;\frac{2}{3}\right)$.

3. Les coordonnées de C sont $(2\,;2)$ et celles de I sont $(0\,;0)$. Comme $x_{\mathrm{C}} \neq x_{\mathrm{I}}$, l'équation réduite de (CI) est de la forme $y = mx + p$. De plus,

$$m = \frac{2-0}{2-0} = \frac{2}{2} = 1$$

donc l'équation réduite de (CI) est de la forme $y = x + p$. De plus, en utilisant les coordonnées de I, $0 = 0 + p$ donc $p = 0$. Ainsi, (CI): $y = x$. Or, $y_{\mathrm{G}} = x_{\mathrm{G}}$ donc G appartient à (CI).