

1. Étude du signe de $A(x) = (2 - 3x)(x + 1)$

$A(x)$ est le produit de deux facteurs affines : $2 - 3x$ et $x + 1$.

Signe de $2 - 3x$

Ici, $m = -3$ et $p = 2$ donc $-\frac{p}{m} = -\frac{2}{-3} = \frac{2}{3}$. Comme $m < 0$, on en déduit que $-3x + 2 \geq 0$ si $x \leq \frac{2}{3}$ et $-3x + 2 \leq 0$ si $x \geq \frac{2}{3}$.

Signe de $x + 1$

Ici, $m = 1$ et $p = 1$ donc $-\frac{p}{m} = -\frac{1}{1} = -1$. Comme $m > 0$, on en déduit que $x + 1 \leq 0$ si $x \leq -1$ et $x + 1 \geq 0$ si $x \geq -1$.

Signe de $A(x)$

On rassemble les résultats précédents dans un tableau de signe. Comme $A(x)$ est le produit de $-3x + 2$ et de $x + 1$, la dernière ligne du tableau est obtenue en utilisant la règle des signes dans chaque colonne.

x	$-\infty$	-1	$\frac{2}{3}$	$+\infty$
signe de $-3x + 2$	+	+	0	-
signe de $x + 1$	-	0	+	+
signe de $A(x)$	-	0	+	-

Ainsi, $A(x) \geq 0$ si $x \in \left[-1; \frac{2}{3}\right]$ et $A(x) \leq 0$ si $x \in]-\infty; -1] \cup \left[\frac{2}{3}; +\infty\right]$.

2. Étude du signe de $B(x) = 1 + x^2$

Attention, ici, $B(x)$ n'est pas un produit de facteurs affines et ne peut pas s'y ramener par factorisation.

Cependant, le signe est ici évident : pour tout réel x , $x^2 \geq 0$ donc $1 + x^2 \geq 1$ et donc $B(x) > 0$.

3. Étude du signe de $C(x) = x - 3 + (x + 2)(x - 3)$

Ici, $C(x)$ n'est pas un produit de facteurs affines mais il peut s'y ramener en factorisant. En effet, pour tout réel x ,

$$C(x) = 1 \times \underline{(x - 3)} + (x + 2)\underline{(x - 3)} = [1 + (x + 2)](x - 3) = (x + 3)(x - 3)$$

Signe de $x - 3$

Ici, $m = 1$ et $p = -3$ donc $-\frac{p}{m} = -\frac{-3}{1} = 3$. Comme $m > 0$, on en déduit que $x - 3 \leq 0$ si $x \leq 3$ et $x - 3 \geq 0$ si $x \geq 3$.

Signe de $x + 3$

Ici, $m = 1$ et $p = 3$ donc $-\frac{p}{m} = -\frac{3}{1} = -3$. Comme $m > 0$, on en déduit que $x + 3 \leq 0$ si $x \leq -3$ et $x + 3 \geq 0$ si $x \geq -3$.

Signe de $C(x)$

On rassemble les résultats précédents dans un tableau de signe. Comme $A(x)$ est le produit de $x - 3$ et de $x + 3$, la dernière ligne du tableau est obtenue en utilisant la règle des signes dans chaque colonne.

x	$-\infty$	-3	3	$+\infty$	
signe de $x - 3$	$-$	$-$	0	$+$	
signe de $x + 3$	$-$	0	$+$	$+$	
signe de $C(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$

Ainsi, $C(x) \leq 0$ si $x \in [-3; 3]$ et $C(x) \geq 0$ si $x \in]-\infty; -3] \cup [3; +\infty[$.

4. Étude du signe de $D(x) = (2x + 1)^2$

Ici, on peut voir $D(x)$ que le produit de deux facteurs affines identiques ($D(x) = (2x + 1)(2x + 1)$) mais ce n'est pas la peine. En effet, le carré d'un réel est toujours positif donc, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $D(x) \geq 0$.

Remarquons cependant que $D(x) = 0$ si et seulement si $2x + 1 = 0$ i.e. $x = -\frac{1}{2}$.

5. Étude du signe de $E(x) = \frac{x + 7}{7x + 1}$

On voit que $E(x)$ est le quotient de deux termes affines : $x + 7$ et $7x + 1$.

Signe de $x + 7$

Ici, $m = 1$ et $p = 7$ donc $-\frac{p}{m} = -\frac{7}{1} = -7$. Comme $m > 0$, on en déduit que $x + 7 \leq 0$ si $x \leq -7$ et $x + 7 \geq 0$ si $x \geq -7$.

Signe de $7x + 1$

Ici, $m = 7$ et $p = 1$ donc $-\frac{p}{m} = -\frac{1}{7} = -\frac{1}{7}$. Comme $m > 0$, on en déduit que $7x + 1 \leq 0$ si $x \leq -\frac{1}{7}$ et $7x + 1 \geq 0$ si $x \geq -\frac{1}{7}$.

Signe de $E(x)$

On rassemble les résultats précédents dans un tableau de signe en prenant bien en compte que le dénominateur de $E(x)$ ne doit pas s'annuler.

x	$-\infty$	-7	$-\frac{1}{7}$	$+\infty$
signe de $x + 7$	$-$	0	$+$	$+$
signe de $7x + 1$	$-$	$-$	0	$+$
signe de $E(x)$	$+$	0	$-$	$+$

Ainsi, $E(x) \geq 0$ si $x \in]-\infty; -7] \cup]-\frac{1}{7}; +\infty[$ et $E(x) \leq 0$ si $x \in [-7; -\frac{1}{7}]$.