

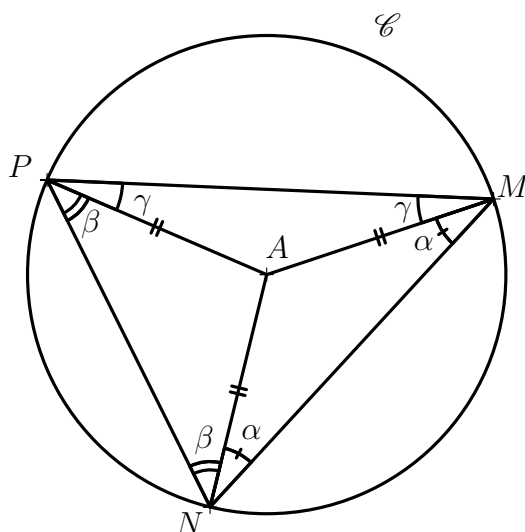
Corrigés des exercices donnés le mercredi 24 juin

Exercice 1. Comme $ABCD$ est un rectangle, ses diagonales sont de même longueur et se coupent en leur milieu donc le triangle OBC est isocèle en O . On en déduit que $\widehat{OCB} = \widehat{OBC}$. De plus, $\widehat{ABC} = 90^\circ$ donc $\widehat{OBC} = 90^\circ - \widehat{ABO}$ et, comme $(EB) \perp (BD)$, $\widehat{EBD} = 90^\circ$ donc $\widehat{OBC} = \widehat{EBD} - \widehat{ABO} = \widehat{EBA}$. On conclut alors que $\widehat{OCB} = \widehat{EBA}$ c'est-à-dire $\widehat{ACB} = \widehat{ABE}$.

Exercice 2. Comme (MP) est tangente à $\mathcal{C}$, $OMP = 90^\circ$. Ainsi, $\widehat{NMP} = 90^\circ - \widehat{OMN}$. Ensuite, comme M et N appartiennent au cercle, $OM = ON$ donc le triangle OMN est isocèle en O et ainsi $\widehat{OMN} = \widehat{ONM}$. Comme $\widehat{NOM} + \widehat{OMN} + \widehat{ONM} = 180^\circ$, on en déduit que $\widehat{NOM} + 2\widehat{OMN} = 180^\circ$ donc $\widehat{NOM} = 180^\circ - 2\widehat{OMN} = 2(90^\circ - \widehat{OMN})$ et ainsi $\widehat{NOM} = 2\widehat{NMP}$.

Remarque. En fait, le point I n'a pas d'intérêt et P pourrait être n'importe quel point de $\mathcal{T}$ autre que B .

Exercice 3. Commençons par faire une figure :



Comme M , N et P sont sur le cercle, $AM = AN = AP$ donc les triangles AMN , ANP et AMP sont isocèles en A . Ainsi, les angles à la base sont égaux dans chacun de ces triangles. Avec les notation de la figure, on a donc $\widehat{MAN} = 180^\circ - 2\alpha$. De plus, comme la somme des angles d'un triangle vaut 180° , $2\alpha + 2\beta + 2\gamma = 180^\circ$ donc $180^\circ - 2\alpha = 2(\beta + \gamma) = 2\widehat{MPN}$. On conclut donc que $\widehat{MAN} = 2\widehat{MPN}$.

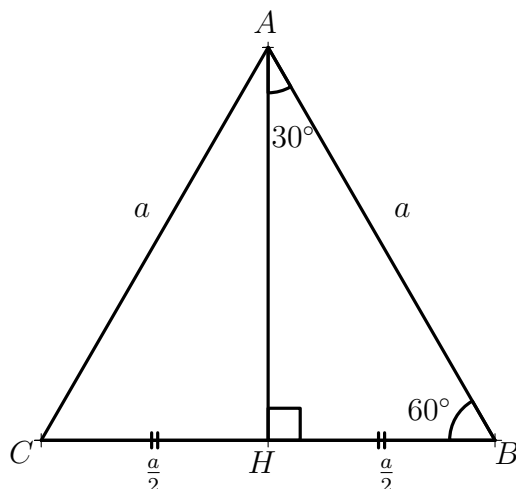
Exercice 4. Posons $a = BC$, $b = AC$ et $c = AB$. D'une part, comme A appartient au demi-cercle de diamètre $[BC]$, le triangle ABC est rectangle en A donc l'aire en bleu est $\frac{bc}{2}$. D'autre part, si on ajoute à l'aire en orange l'aire du demi-cercle de diamètre $[BC]$, on trouve la même aire que si on ajoute l'aire du triangle ABC , l'aire du demi-cercle de diamètre $[AB]$ et l'aire du demi-cercle de diamètre $[AC]$. Ainsi, l'aire en orange est

$$\frac{bc}{2} + \pi \left(\frac{b}{2}\right)^2 + \pi \left(\frac{c}{2}\right)^2 - \pi \left(\frac{a}{2}\right)^2 = \frac{bc}{2} + \pi \left(\frac{b^2 + c^2 - a^2}{4}\right).$$

Or, ABC est rectangle en A donc, par le théorème de Pythagore, $a^2 = b^2 + c^2$ et ainsi $b^2 + c^2 - a^2 = 0$. On en déduit que l'aire en orange vaut $\frac{bc}{2}$ et donc est égale à l'aire en bleu.

Exercice 5

1.



2. Comme ABC est équilatéral, $\widehat{HBA} = 60^\circ$ et la hauteur H est aussi la médiatrice de $[BC]$ et la bissectrice de $\widehat{BAC}$. Ainsi, $HB = \frac{a}{2}$ et, comme $\widehat{BAC} = 60^\circ$, $\widehat{HAB} = 30^\circ$.

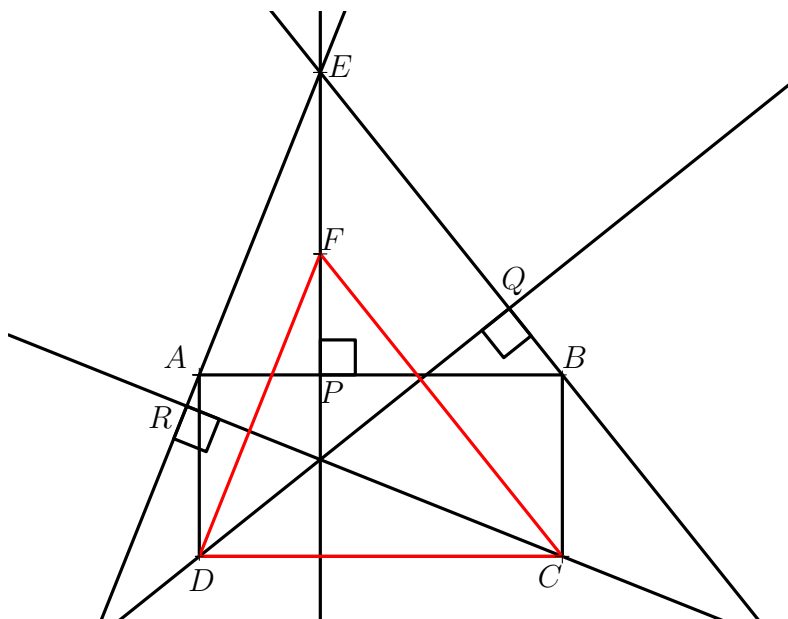
Dans le triangle AHB rectangle en H , on a alors $\sin(30^\circ) = \frac{HB}{AB} = \frac{\frac{a}{2}}{a} = \frac{a}{2} \times \frac{1}{a} = \frac{1}{2}$ et, de même, $\cos(60^\circ) = \frac{HB}{AB} = \frac{1}{2}$.

3. Grâce au théorème de Pythagore dans le triangle rectangle AHB , $AH^2 = AB^2 - HB^2 = a^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2 = a^2 - \frac{a^2}{4} = \frac{3a^2}{4}$. Comme $AH > 0$, on en déduit que $AH = \sqrt{\frac{3a^2}{4}} = \frac{\sqrt{3} \times \sqrt{a^2}}{\sqrt{4}}$ et donc, comme $a > 0$, $AH = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

4. a. On en déduit que l'aire de ABC est $\frac{a \times \frac{a\sqrt{3}}{2}}{2} = \frac{a^2\sqrt{3}}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$.

- b. Dans le triangle AHB rectangle en H on a $\cos(30^\circ) = \frac{AH}{AB} = \frac{\frac{a\sqrt{3}}{2}}{a} = \frac{a\sqrt{3}}{2} \times \frac{1}{a} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ et, de même, $\sin(60^\circ) = \frac{AH}{AB} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Exercice 6. Considérons l'image du triangle AEB par la translation de vecteur $\overrightarrow{AD}$. On obtient un triangle DFC :



Notons que, comme $(EP) \perp (AB)$ et $(AD) \perp (AB)$, $(EP) \parallel (AD)$. Ainsi, l'image F de E par la translation de vecteur $\overrightarrow{AD}$ appartient à la droite (EP) . De plus, comme $ACFE$ et $EFCB$ sont des parallélogrammes, $(AE) \parallel (FD)$ et $(EB) \parallel (FC)$. Enfin, comme $ABCD$ est un rectangle, $(AB) \parallel (DC)$.

Par hypothèse, $(EP) \perp (AB)$. Or, $(EP) = (FP)$ et $(AB) \parallel (DC)$ donc $(EP) \perp (DC)$ c'est-à-dire, comme (EP) passe par F , (EP) est la hauteur de DFC issue de F .

De plus, toujours par hypothèse, $(DQ) \perp (EB)$ et $(CR) \perp (AE)$ et on vient de voir que $(EB) \parallel (FC)$ et $(AE) \parallel (DF)$ donc $(DQ) \perp (FC)$ et $(CR) \perp (AE)$ et ainsi (DQ) et (CR) sont les hauteurs de DFC issues de D et C . Comme les hauteurs d'un triangle sont concourantes, on en déduit que (EP) , (DQ) et (CR) sont concourantes.

Exercice 7

1. Par hypothèse $(MN) \perp (AB)$ et, comme (QP) est la tangente à $\mathcal{C}$ en B , $(QP) \perp (AB)$. On en déduit que $(MN) \parallel (QP)$ donc $MNPQ$ est un trapèze.
2. a. Montrons que (AQ) est la médiatrice de $[BM]$. D'une part, $AB = AM$ car ce sont des rayons de $\mathcal{C}$. D'autre part, dans le triangle AMQ rectangle en M , $MQ^2 = AQ^2 - AM^2$ et, dans le triangle ABQ rectangle en B , $BQ^2 = AQ^2 - AB^2$. Or $AM = AB$ donc $MQ^2 = BQ^2$ et, comme ce sont des longueurs, $MQ = BQ$. Ainsi, A et Q sont équidistants de M et B donc (AQ) est la médiatrice de $[BM]$. Comme AMB est isocèle en A , on en déduit que (AQ) est la hauteur de (AMB) issue de A . De plus, par hypothèse, (MD) est la hauteur de (AMB) issue de M donc le point R est l'orthocentre de AMB .
b. On a vu précédemment que $MQ = QB$ donc MQB est isocèle en Q .
c. Comme R est l'orthocentre de AMB , (BR) est la hauteur issue de B donc $(BR) \perp (AM)$. Or, $(MQ) \perp (AM)$ donc $(BR) \parallel (MQ)$. Ainsi, le quadrilatère $MRBQ$ a ses côtés opposés parallèles 2 à 2 donc $MRBQ$ est un parallélogramme. De plus, $MQ = QB$ donc $MRBQ$ est un losange.
3. a. Comme $(RD) \parallel (BQ)$, en utilisant le théorème de Thalès dans le triangle ABQ , $\frac{AD}{AB} = \frac{RD}{BQ}$. Or, $AD = 4$ et $AB = 5$ donc $RD = \frac{4}{5}BQ$.
b. En utilisant le théorème de Pythagore dans le triangle RDB rectangle en D , on obtient $RB^2 = RD^2 + DB^2$. Or, $RB = BQ$ car $MRBQ$ est un losange, $RD = \frac{4}{5}BQ$ d'après la question précédente et $BD = 1$ donc $BQ^2 = \frac{16}{25}BQ^2 + 1$. Dès lors, $BQ^2 - \frac{16}{25}BQ^2 = 1$ c'est-à-dire $\frac{9}{25}BQ^2 = 1$ donc $BQ^2 = \frac{25}{9}$. Comme $BQ > 0$, on en déduit que $BQ = \frac{5}{3}$.
4. En utilisant le théorème de Pythagore dans le triangle AMD rectangle en D , on obtient $MD^2 = AM^2 - AD^2 = 5^2 - 4^2 = 25 - 16 = 9$ donc, comme $MD > 0$, $MD = 3$.
5. Comme $AM = AN$, le triangle AMN est isocèle en A . De plus, $(AD) \perp (MN)$ donc (AD) est la hauteur de AMN issue de A . Comme AMN est isocèle, (AD) est également la médiatrice issue de A donc D est le milieu de $[MN]$.

Comme AMN est isocèle en A , (AD) est aussi la bissectrice de $\widehat{MAN}$ donc $\widehat{MAB} = \widehat{BAN}$. De plus, on a vu que (AQ) est la hauteur du triangle AMB issue de A donc, comme ce triangle est isocèle, (AQ) est également la bissectrice de $\widehat{MAB}$ donc $\widehat{QAB} = \frac{1}{2}\widehat{MAB}$. En raisonnant exactement de même, on montre que (AP) est la bissectrice de $\widehat{BAN}$ et donc $\widehat{BAP} = \frac{1}{2}\widehat{BAN}$. Comme $\widehat{MAB} = \widehat{BAN}$, on conclut que $\widehat{QAB} = \widehat{BAP}$. Dès lors, dans le triangle QAB rectangle en B , $QB = AB \times \tan(\widehat{QAB})$ et, dans le triangle BAP rectangle en B , $BP = AB \times \tan(\widehat{BAP})$. Finalement, comme $\widehat{QAB} = \widehat{BAP}$, on conclut que $QB = BP$ donc B est le milieu de $[QP]$.

6. La petite base de $MNPQ$ est $QP = 2QB = \frac{10}{3}$, la grande base de $MNPQ$ est $MN = 2MD = 6$ et la hauteur est $DB = 1$ donc l'aire de MNP est $\frac{(\frac{10}{3} + 6) \times 1}{2} = \frac{14}{3}$.